続×４ベクトルの回転

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-03-13

我々は，続々ベクトルの回転 で行列の指数関数がうまく行列の回転を表すことを見ました．それはなぜかを説明できたので，解釈の仕方を書こうと思います．

回転を表す微分方程式

Joh 氏は ベクトルの回転 に於いて，微小回転について触れています．それは次のような式です．

$$d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r})d\phi \tag{1}$$

ここで，この微小量を時間 dt での微分と考えて，$\dfrac{d\phi}{dt}\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{\omega}$ と置くと，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r})\frac{d\phi}{dt} \\ &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2}$$

とします．これは単位時間に回転軸 $\boldsymbol{n}$ と回転の対象である位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の両方に直交する方向に $\omega \equiv |\boldsymbol{\omega}| = \dfrac{d\phi}{dt}$ だけ動く系であることを示しています．つまり，その解 $\boldsymbol{r}$ は回転を行った後の位置ベクトルを記述します．

ここで 続ベクトルの回転 で書いた行列での記法で，式 (2) を書き直します．すると，

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と行列で表現できますから，式 (2) は，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r})\frac{d\phi}{dt} \\ &= \omega N \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{4}$$

となります．すると，ジョルダン標準形の指数関数の応用 と同じ論法で，解は

$$\boldsymbol{r} = \exp(t\omega N)\boldsymbol{r}_0 \tag{5}$$

だと分かります．なぜこうなるかは，次の話が厳密ではありませんが参考にはなるでしょう．

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x \tag{6}$$

がネイピア数の定義だったと思います．ここで微小回転を $\boldsymbol{r}$ に施すということは，

$$\boldsymbol{r} = (1+t\omega N)\boldsymbol{r}_0 \tag{7}$$

ということでした．これを二ステップに分けて考えると，

$$\boldsymbol{r} = (1+\frac{t\omega N}{2})^2\boldsymbol{r}_0 \tag{8}$$

となり，三ステップだと，

$$\boldsymbol{r} = (1+\frac{t\omega N}{3})^3\boldsymbol{r}_0 \tag{9}$$

ですね？つまり，それを何回も分けて繰り返すと，

$$\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{t\omega N}{n})^n\boldsymbol{r}_0 \tag{10}$$

と書いてよいでしょう．つまり，これは

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{t\omega N}{n})^n = \exp(t\omega N) \tag{11}$$

ということです．

N の指数関数の計算

これから，もうすでに 続々ベクトルの回転 で求めましたが，別の方法で行列 N の指数関数を求めたいと思います．まず，N を対角化して Λ とし，N の n 乗を求めます．

$$\begin{aligned}\Lambda &= \omega P^{-1}NP \\ &= \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

で，この固有値の順番に対応する固有ベクトルからなる行列 P は，

$$P = \begin{pmatrix} ln+im & ln-im & l \\ mn-il & mn+il & m \\ n^2-1 & n^2-1 & n \end{pmatrix} \tag{13}$$

となります．i は虚数単位です．よって，この行列の指数関数は，

$$\begin{aligned}\exp(t\Lambda) &= \exp(t\omega P^{-1}NP) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

となります．ここで後の議論に便利なように，P をユニタリー化して U としておきます．なぜなら，そうすると逆行列が共役転置（随伴作用）で求まるからです．簡単の為，三次元極座標

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{15}$$

を導入すると，

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi + i\sin\phi & \cos\theta\cos\phi - i\sin\phi & \sqrt{2}\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi - i\cos\phi & \cos\theta\sin\phi + i\cos\phi & \sqrt{2}\sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & -\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

であり，この共役転置行列 $U^\dagger = U^{-1}$ は，

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - i\sin\phi & \cos\theta\sin\phi + i\cos\phi & -\sin\theta \\ \cos\theta\cos\phi + i\sin\phi & \cos\theta\sin\phi - i\cos\phi & -\sin\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{2}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

です．よって，ダイアド積 $\boldsymbol{nn}$ を用いて，

$$\boldsymbol{nn} = \begin{pmatrix} ll & lm & ln \\ lm & mm & mn \\ ln & mn & nn \end{pmatrix} \tag{18}$$

と書き，三次単位行列を I と書くことにすると，正方行列の三連続積の展開 の方法を用いて，

$$\begin{aligned} \exp(t\omega N) &= UU^{-1}\exp(t\omega N)UU^{-1} \\ &= U\exp(t\omega U^{-1}NU)U^{-1} \\ &= U\exp(t\Lambda)U^{-1} \\ &= U\begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}U^{-1} \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{2}(I - iN - \boldsymbol{nn}) + \frac{e^{-i\omega t}}{2}(I + iN - \boldsymbol{nn}) + \boldsymbol{nn} \end{aligned} \tag{19}$$

ここで，

$$N^2 = \begin{pmatrix} -m^2 - n^2 & lm & ln \\ lm & -l^2 - n^2 & mn \\ ln & mn & -l^2 - m^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

なので，

$$\boldsymbol{nn} = I + N^2 \tag{21}$$

の関係を使うと，

$$\begin{aligned} \exp(t\omega N) &= \frac{e^{i\omega t}}{2}(I - iN - \boldsymbol{nn}) + \frac{e^{-i\omega t}}{2}(I + iN - \boldsymbol{nn}) + \boldsymbol{nn} \\ &= \boldsymbol{nn} - N^2\cos\omega t + N\sin\omega t \end{aligned} \tag{22}$$

となり，続々ベクトルの回転 の結果と一致します．つまり，これは位置ベクトルが回転軸 $\boldsymbol{n}$ の周りを角速度 ω で回転する様子を記述している式だったのです．めでたしめでたし．それでは，今日はこの辺で，お疲れ様でした．