テンソル不変量

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-08-25

今までにも何度も強調してきたことですが，テンソルの成分は座標系（基底）の取り方に応じて変わります．しかし，成分が好き勝手に変わるわけではなく，成分の変わり方は座標系の変わり方を何らかの形で反映するものです．何か成分の変わり方に一定の法則があるとすれば，テンソルの成分を組み合わせることで座標系によらない量が作れるかも知れません．

例えばスカラー（零階のテンソル）は常に座標不変量でした．ベクトル（一階のテンソル）の内積も座標不変量でした．二階以上のテンソルにも，このような不変量があるのでしょうか．

二階のテンソル

二階のテンソルの不変量は，固有値の固有方程式を考えれば分かります．

$$\lambda^3 - (T_{11}+T_{22}+T_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

固有値 λ はスカラーなので座標変換に対して不変です．式 (1) が $(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\beta)(\lambda_3-\gamma)=0$ の形に変形できることを考えれば，式 (1) の係数もそれぞれ座標不変量だということが分かるでしょう．

$$I_1 = T_{11}+T_{22}+T_{33} \tag{2}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

これら I_1, I_2, I_3 が二階のテンソル T_{ij} の座標不変量になります．実は，この 3 つが最も基本的な座標不変量で，二階のテンソルに関する他の座標不変量は，全て I_1, I_2, I_3 を組み合わせて作ったものになります．

n 次元の場合

さきほどの例は 3 次元の二階のテンソルについて固有方程式を求めましたが，一般に n 次元の場合には固有値の数に応じて n 種類の座標不変量が出てきます．

$$H_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$$

$$H_2 = \lambda_1\lambda_2 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$.....................................$$

$$H_n = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$$

これらは，固有値を組み合わせた基本対称式だと考えることもできます．（基本対称式については こちら を参考にして下さい．）

練習問題

二階のテンソル T_{ij} で，次の量が座標系不変であることを示して下さい．

1. $(T_{11} + T_{22} + T_{33})^2$
2. $T_{ij}T_{ij}$

偏差テンソル

二階のテンソルで，$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0$ となるものを **偏差テンソル** と呼びます．任意の二階のテンソルは，偏差テンソルと 等方テンソル の和に分解できます．

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \\ &= (T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}) + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \\ &= D_{ij} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \qquad (5) \end{aligned}$$

このような変形は常に可能で，$\frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}$ は等方テンソル，D_{ij} は偏差テンソルになります．

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ii} - \frac{1}{3}T_{ii} \cdot 3 = 0$$

式 (5) のような式分解は，流体力学に出て来ると思います．（流体力学では通常，等方性流体を考えますので，圧力は流体内で等方的と考え，等方性テンソルを使いたいのです．）こんな分解を見たら最初はびっくりすると思いますが，『何か等方的に働いているものがあり，それを明示的に分離したいのだろう』と推察できればなかなかの洞察力です．

[*1] 三階以上のテンソルにも，不変量はあるのでしょうが，著者の調べた限りでは紹介されている文献はありませんでした．きっとすごく複雑なのだと思います．二階のテンソルの座標不変量はリーマン幾何学で曲面の曲率を考える際にまた使いますので，n 次元の場合を含めて大事です．