

# 擬テンソル

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-08-25

ベクトルとは、直交変換に際して次のような変換則に従う量と定義されました。

$$A'_i = \alpha_{ij} A_j \quad (1)$$

これとそっくりな、擬ベクトル という量が **反対称テンソルと軸性ベクトル** に出てきました。

$$A'_i = \pm \alpha_{ij} A_j \quad (2)$$

違いは、 $\pm$  という記号があるかないかですが、擬ベクトルは、右手系と左手系が入れ替わるような座標変換に対しては、その符号を入れ替わるのでした。(擬ベクトルを、軸性ベクトルとも呼びます。) 擬テンソルのこの性質を高階のテンソルにまで一般化し、やはり右手系・左手系の交換に伴って符号を変えるような量を、擬テンソル と呼びます。擬テンソルの一般的な定義は、この座標変換を表わす行列の行列式  $\det|A|$  を用いて、次のように定式化します。

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \det|\alpha| \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n} A^{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (3)$$

この  $\det|\alpha|$  が、 $\pm$  になることを次のセクションで確認します。

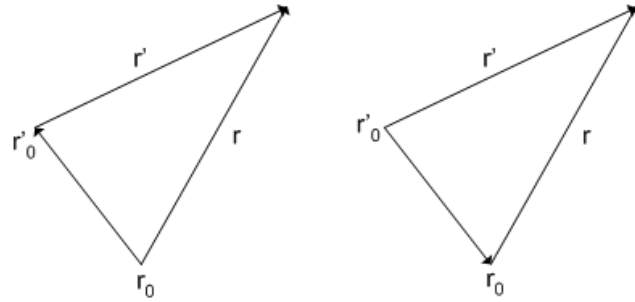
## 座標変換の行列式

まずはベクトルの変換から考えます。直交座標系で考え、座標変換前の基底ベクトル  $(i_i, i_j, i_k)$ 、変換後の基底ベクトルを  $(i'_i, i'_j, i'_k)$  とします。直交座標系で考えているので、基底については次の関係式がなりたちます。

$$i_i \cdot i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4-1)$$

$$i'_i \cdot i'_j = \delta'_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4-2)$$

また、新旧の座標系の間には、次図のような関係があります。図中  $r_0$  は旧座標系の原点、 $r'_0$  は新座標系の原点とします。



このとき次の関係式が分かるでしょう．

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}' \quad (5-1)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \quad (5-2)$$

これより， $A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3 = A'_1 i'_1 + A'_2 i'_2 + A'_3 i'_3$  として，成分に関して次式がなりたちます．ダッシュのつく位置に気をつけてください．両辺とも，縮約により  $j$  について和を取る形になっています．

$$A_j i_j = A'_j i'_j + A'_{0j} i_j \quad (6-1)$$

$$A'_j i'_j = A_j i_j + A_{0j} i'_j \quad (6-2)$$

式 (6-1) の両辺に  $i_k$  を，式 (6-2) の両辺に  $i'_k$  を作用させて内積を取ると，基底の直交関係より，次式を得ます．

$$A_k = A'_j (i'_j \cdot i_k) + A'_{0k} \quad (7-1)$$

$$A'_k = A_j (i_j \cdot i'_k) + A_{0k} \quad (7-2)$$

次に，式 (7-1)(7-2) 中の内積部分を，上手くテンソルの形に直すことを考えます．基底の変換則  $i'_j = \alpha_{j'l} i_l$  の両辺と  $i_k$  の内積を取ることで，式 (7-1) 中の内積部分  $(i'_j \cdot i_k)$  を次のように表わせるでしょう．

$$\begin{aligned} (i'_j \cdot i_k) &= (\alpha_{j'l} i_l) \cdot i_k \\ &= \alpha_{j'k} \end{aligned}$$

同様に， $i_j \cdot i'_k = i_j \cdot (\alpha_{k'l} i_l) = \alpha_{jk'}$  となります．一方， $i'_j = \alpha_{j'l} i_l$  の両辺と  $i'_k$  の内積を取ると次式を得ます．

$$\begin{aligned} (i'_j \cdot i'_k) &= (\alpha_{j'l} i_l) \cdot (\alpha_{k'm} i_m) \\ &= \alpha_{j'l} \alpha_{k'm} \delta_{lm} \\ &= \alpha_{j'm} \alpha_{k'l} \\ &= \delta_{j'k'} \end{aligned} \quad (8)$$

導出が長くなりましたが，式 (8) が求めていた式です．テンソルの関係式  $\alpha_{j'm} \alpha_{k'l} = \delta_{j'k'}$  を行列の形に書き換え，両辺の行列式を取ります．

$$\det[\alpha_{j'm} \alpha_{k'l}] = \det[\delta_{j'k'}] = 1$$

クロネッカーのデルタの行列式は添字に関わらず 1 です。また,  $[\alpha_{j'm}]$  と  $[\alpha_{k'm}]$  の行列式は同じはずですから, 左辺は  $(\det[\alpha_{j'm}])^2$  だと考えても良く, 結局次式を得ます。

$$\det[\alpha_{j'm}] = \pm 1$$

式 (3) は次のように書けます。

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \pm \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n} A^{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (9)$$

式 (3) もしくは式 (9) を擬テンソルの定義式とします。符号は, 右手系と左手系が入れ替わる座標変換においては  $-1$ , 右手系と左手系が入れかわらない座標変換においては  $+1$  に取ります。