演算子の性質と交換関係

tomo @物理のかぎプロジェクト

2005-01-01

量子力学にはなくてはならないものの 1 つが演算子です．その演算子について学びます．演算子とは，関数に作用させて演算を行うもので，量子力学では，さまざまな物理量が演算子で表されます．いきなり演算子と言われても，ぴんとこないと思いますが，例えば，位置を表す x や，運動量を表す p も演算子として扱うことになります．

演算子と数との違い

ある数 a, b がある時,

$$ab = ba$$

が成り立ちます．つまり，2 つの数の積は交換します．しかし，ある演算子 A, B がある時，一般には

$$AB \neq BA$$

であり，2 つの演算子の積は交換しません．

演算子の交換関係とは

そこで，演算子 A, B に対して,

$$[A, B] = AB - BA$$

という量を定義します．これを演算子 A, B の交換関係といいます．

$$[A, B] \neq 0$$

ならば,「演算子 A, B は交換しない」といい,

$$[A, B] = 0$$

ならば,「演算子 A, B は交換する」といいます．

例

冒頭で紹介した, x と p について，交換関係を計算してみます．量子力学では,（1 次元の場合）$p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ とします．ここでは，分かりやすいように，この交換関係が後ろの $\phi(x)$ という関数に作用するとしてみましょう．さらに, x や p が演算子であることを強調するために, $\hat{x},\hat{p}$ と書くことにします.

$$
\begin{aligned}
[\hat{x},\hat{p}]\phi(x) &= \left[\hat{x},-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\phi(x) = -i\hbar\left[\hat{x},\frac{\partial}{\partial x}\right]\phi(x) \\
&= -i\hbar\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}\right)\phi(x) = -i\hbar\left(x\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}-\phi(x)-x\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right) = i\hbar\phi(x)
\end{aligned}
$$

となって,

$$[\hat{x},\hat{p}]\phi(x) = i\hbar\phi(x)$$

つまり,

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$$

と求まります. $\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}$ をすぐに 1 としてしまいがちですが, $\frac{\partial}{\partial x}$ は後ろの $\phi(x)$ にもかかっていますので，上記のような計算結果となります.

問

演算子 A,B,C があるとき，交換関係について，以下の式が成り立つことを示しなさい.

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$$