シュレーディンガー表示とハイゼンベルク表示

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-06-05

時間順序積 (time-ordered product，T-product とも言う．) の計算は，どうやってすればいいのという方むけです．逐次近似の三次の項まで，計算してみることにします．

次の記事は，相互作用表示 です．

シュレーディンガー方程式とシュレーディンガー表示

波動関数 $|\psi(x,t)\rangle$, ハミルトニアン H に対するシュレディンガー方程式は，下のように形をしています．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)\rangle=\hat{H}|\psi(x,t)\rangle \tag{1}$$

形式的に解くことにより，

$$|\psi(x,t)\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(x,0)\rangle \tag{2}$$

となります．ここで，時間発展演算子 $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ は，ユニタリー演算子[*1] なので $\hat{U}=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ と置きます．

時間発展が，状態ベクトルに影響を与えるこの描像をシュレーディンガー表示と言います．

ハイゼンベルク表示

状態 $|\psi(t)\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$ に対する，オブザーバブル $\hat{O}$ の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle$ を考えます．

$$\langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle=\langle\psi(0)|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle=\langle\psi(0)|\hat{O}(t)|\psi(0)\rangle \tag{3}$$

と表すことができて，ここで

$$\hat{O}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{4}$$

[*1] $\hat{H}$ はエルミート演算子なので，$\hat{H}^\dagger=\hat{H}$ より $(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t})^\dagger=1+(\frac{\hat{H}}{i\hbar}t)^\dagger+\frac{1}{2}(\frac{\hat{H}}{i\hbar})^{2\dagger}t^2+\cdots=1+(\frac{i}{\hbar})\hat{H}t+\frac{1}{2}(\frac{i}{\hbar})^2\hat{H}^2t^2=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

としました．

この演算子の時間発展は,

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}(\hat{H}\hat{O} - \hat{O}\hat{H})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{O}(t) - \hat{O}(t)\hat{H}) \tag{5}$$

演算子の交換子 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ を定義すると，演算子の時間発展の式は，次のように書けます．

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}(t)] \tag{6}$$

このように演算子が時間発展する描像をハイゼンベルク表示といいます．

次の話では，相互作用表示について書きます．つづきは こちら