

# オイラー方程式

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-10-03

剛体の回転シリーズ第7弾です。前の記事は [加速度座標系と慣性力](#) です。次の記事は [テニスラケットの定理](#) です。

## オイラー方程式

オイラー方程式を導きます。オイラー方程式というのは、回転する座標系から見た、回転の変化を調べる方程式です。角速度  $\omega$  で回転する座標から見た角運動量はベクトルですので、[加速度座標系と慣性力](#) で導いた式 (1) を適用できます。

つまり、任意のベクトル  $A$  に成り立つ式

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta A}{\delta t} + \omega \times A \quad (1)$$

で、\*1  $A$  に角運動量ベクトル  $L$  を代入してやると、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\delta L}{\delta t} + \omega \times L \quad (2)$$

ここで、[慣性モーメント](#) で書いた慣性主軸を座標系として採用すると、

$$\begin{aligned} L &= I_I \omega \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

よって、

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

\*1  $\frac{\delta A}{\delta t}$  とは、回転座標系から見た見かけの変化ベクトルでした。

ここで、**角運動量** の式 (3) を思い出しますと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \\
 &= \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \\
 &= \begin{pmatrix} I_1 \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \\ I_2 \frac{\delta\omega_2}{\delta t} \\ I_3 \frac{\delta\omega_3}{\delta t} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \end{pmatrix} \tag{5}
 \end{aligned}$$

となります\*2。

長くなったのでこの式をもう一度書きなおすと、

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となります。この式 (6) をオイラー方程式と呼びます。次回は、このオイラー方程式を用いて、テニス・ラケットの定理と言うものを導きます。

ちなみに慣性主軸以外の静止座標系（上の議論と区別するため \* をつける。）から見た回転の方程式は、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} \tag{7}
 \end{aligned}$$

となりますが、慣性モーメント  $I$  が時間変化するため、複雑になってしまいます。

続きは [こちら](#)

\*2 ここで、**加速度座標系と慣性力** の式 (4) の次にくる式、 $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  を用いました。