

## 2 次方程式の解の公式

崎間@物理のかぎプロジェクト

2005-11-13

2 次方程式には「解の公式」なるものが存在します。中学・高校では頻繁に使うのですが、個人的に最近あまり使わなくなっていました。公式の存在すら忘れてしまい「ん、これはどうやって解くんだ?」、  
「解の公式?は?」なんてことにならないためにも、そして「公式」に頼りきらないためにも、2 次方程式の解の公式を導出を試みましょー。さらに学びたい人には、[平方完成の図形的イメージ](#) という姉妹記事も用意しています。

### 解の公式

まずは公式そのものの確認です。2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

で与えられるという公式、これが「2 次方程式の解の公式」です。ほとんどの人が、中学生のとき数学の授業で暗記させられたと思います。みなさんは、まだ覚えていますか? (僕はついこないだまで忘れてました。)

### 導出

それでは、解の公式を導いてみます。単純に、2 次方程式を平方完成して解けば良いです。つぎの 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を、実際に平方完成して解いて行きましょー (平方完成の手順を忘れてしまった人は、その復習にもなりますよ)。最初に、一番次数の大きい  $x^2$  の係数で  $x$  の項を括ります。いまの場合は  $a$  で括ることになります。

$$a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = 0 \quad (2)$$

そして、括ったカッコを 2 乗（平方）の形にします。ここが平方完成です。

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + c = 0 \quad (3)$$

このとき、マイナスの項が出てくる理由はいいですね（よく分からなければ、実際に式 (3) を計算して、式 (2) に戻ること確かめてみてください）。

式 (3) の左辺第 1 項だけを左辺に残し、それ以外は右辺に移項します。

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - c$$

上式の両辺を  $a$  で割って（ $a \neq 0$  とします）、右辺を通分すると

$$\begin{aligned} \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2}{2^2 a^2} - \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

となります。ここまでくれば、後は

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (4)$$

を変形して  $x =$  の形にしてやれば解の公式のできあがりです。とりあえず、左辺の 2 乗を外したいですね。

たとえば「 $x^2 = u$ 」という式があって、 $x^2$  の二乗を外したい場合は、右辺をルートにすれば良いのでした。しかし  $x = \sqrt{u}$  では間違いです。二乗して  $u$  になる数は  $+\sqrt{u}$  と  $-\sqrt{u}$  の二つあることに注意してください。したがってこの例では  $x = \pm\sqrt{u}$  となります。

これを踏まえて式 (4) を変形しますと

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

となります。そして左辺第 2 項を移項して

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

通分すると

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

のできあがりです。これで、解の公式 (1) の導出が完了しました。導出の流れさえ理解しておけば、解の公式を忘れてしまっても、 $ax^2 + bx + c = 0$  からスタートしていつでも導くことができます。解の公式を導く方法は上の通りでしたが、「平方完成」とはどういう意味があったのでしょうか。知りたい方は [平方完成の図形的イメージ](#) に進んでみてください。