ジョルダン細胞のｎ乗

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-03-11

ジョルダンの標準形で有名なジョルダン細胞のｎ乗を求めます．

ジョルダン細胞

ジョルダン細胞とは，次のｋ次正方行列のことを言います．

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \tag{1}$$

このｎ乗を求めてみましょう．

注目する性質は，対角行列（単位行列の定数倍）Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

のどんな行列とも可換な性質と，べきゼロ行列 N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

の持つ，何乗かするとゼロになる性質です．ためしに四次のべきゼロ行列のべき乗を求めてみましょう．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

とこの様に，べき乗すると１のなすラインが上がっていきます．

ここで求めたいのは，J_k の n 乗,

$$(J_k)^n = (\Lambda + N)^n \tag{8}$$

です．二項定理を用います．

$$\begin{aligned}(J_k)^n &= (\Lambda + N)^n \\ &=_n C_0 \Lambda^n +_n C_1 \Lambda^{n-1} N^1 +_n C_2 \Lambda^{n-2} N^2 + \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

ここで N のべき数を昇順にならべました．あるところからは，N^n はゼロ行列になります．

簡単な例

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(J_4)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$(J_4)^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$(J_4)^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

とこの様に簡単にべき乗が求まります．

行列の指数関数

行列の指数関数がジョルダン細胞の場合にも，求まったので書いておきます．

$$\begin{aligned} \exp(tJ_k) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J_k)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-i)!i!} t^n \Lambda^{n-i} N^i \\ &= N^i \frac{t^i}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-i}\Lambda^{n-i}}{(n-i)!} \\ &= N^i \frac{t^i}{i!} \exp(t\lambda) \end{aligned} \tag{14}$$

よって，例えば，四次なら，

$$\exp(tJ_4) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda) & \frac{t}{1!}\exp(t\lambda) & \frac{t^2}{2!}\exp(t\lambda) & \frac{t^3}{3!}\exp(t\lambda) \\ 0 & \exp(t\lambda) & \frac{t}{1!}\exp(t\lambda) & \frac{t^2}{2!}\exp(t\lambda) \\ 0 & 0 & \exp(t\lambda) & \frac{t}{1!}\exp(t\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \exp(t\lambda) \end{pmatrix} \tag{15}$$

となります．以上でこの話は終わりです．続々ベクトルの回転 と比べると面白いかもしれません．ここまで読んだなら，その応用をぜひ知ってください．ジョルダン標準形の指数関数の応用 をご覧あれ．今日はここまで，お疲れ様でした．