無限等比級数の和

崎間@物理のかぎプロジェクト

2003-05-02

初項 a_1 ，公比 r の等比数列 a_n において， $-1 < r < 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$

という公式が成り立ちます．等比数列をずっとずっと足しあわせていったら，上の式の右辺になるというのです．無限に足しあわせたのに一定の値になる（収束する）というのはちょっとフシギな感じがします．

導きかた

この公式を導くのは簡単です．等比数列の和の公式

$$a_n = a_1 r^{n-1} \tag{1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \qquad (r \neq 1) \tag{2}$$

$$S_n = a_1 n \qquad (r = 1) \tag{3}$$

を思い出します．式 (2) において， $-1 < r < 1$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

が言いえます．たとえば $r = 0.5$ の場合，$0.5 \times 0.5 = 0.25, 0.25 \times 0.5 = 0.125, \ldots$ と，掛け続けるといつかはゼロになりそうです．上の式は，絶対値が 1 より小さい数を永遠に掛け続けて行くと，いつかゼロになるということです．そうすると式 (2) は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \\ &= \frac{-a_1}{r-1} \\ &= \frac{a_1}{1-r}\end{aligned}$$

となります．無限等比級数の和が収束するのは，足しあわせる数の値がだんだん小さくなって，いつかはゼロになるからです．もちろん，$-1 < r < 1$ のとき，という条件つきですが．

例

数列

$$1 + e + e^2 + e^3 + \cdots$$

は初項 1，公比 e の等比級数です．もしも $-1 < e < 1$ ならば

$$1 + e + e^2 + e^3 + \cdots = \frac{1}{1-e}$$

と有限の値に収束します．この逆の，

$$\frac{1}{1-e} = 1 + e + e^2 + e^3 + \cdots$$

という関係も覚えておくと便利なことがあります．