

ガウス積分の公式

CO @物理のかぎプロジェクト

2004-01-01

物理を学んでいると、頻繁に出てくる積分というのがあります。その一つが ガウス積分 です。

ガウス積分

ガウス積分とは、つぎのような式で書かれる積分のことです。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (1)$$

ここで x は実数、 a は正の定数です。

ガウス積分の公式

ふつうガウス積分は、公式として扱われることが多いです。ガウス積分の公式はつぎのようなものです。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2)$$

ガウス積分の公式の証明

いくら公式だとはいっても、一度は本当にそうなることを確認しておきたいものです。この公式の証明は院試で頻出ですので、その道を目指す方は覚えておくと良いでしょう。

まず、左辺の積分値を I とします。 I は被積分関数の関数形から、定義域が $I > 0$ であることがわかります。 I は、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

と書いても、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

と書いても、積分値に変わりはありませんね。

したがって，

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

と変形していくことができます．

ここで $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変数変換をします．また，無限遠で積分領域を矩形から円形へと変形します．被積分関数が無限遠で速やかに 0 に収束することから，このようにしても積分値は変わりません．すると (3) 式は，

$$I^2 = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ar^2} \tag{4}$$

と書けます． θ については積分を実行することができて，さらに式変形をしていくと

$$\begin{aligned}
 I^2 &= 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-ar^2} \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} d\left(\frac{r^2}{2}\right) e^{-ar^2} \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\
 &= \frac{\pi}{a}
 \end{aligned} \tag{5}$$

となります．ただし 2 行目から 3 行目で見やすいように，積分変数 r^2 を t に置換しています． $I > 0$ なので，正の値のみをとって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{6}$$

となり，ガウス積分の公式を得ることができました．