

半値全幅 (FWHM) と分散の関係

CO @物理のかぎプロジェクト

2006-7-16

ここではガウス分布 (正規分布) に現れる分散 σ^2 と、半値全幅 (FWHM) の関係について解説します。

ガウス分布

ガウス分布は正規分布とも呼ばれる、次のような形で表される関数です。

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

σ^2 は分散といいます。ガウス分布は $x = X$ を中心として次図のような分布になります。

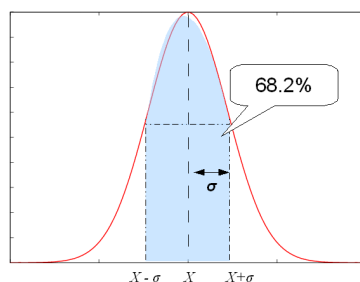


図1 ガウス分布

幅のパラメータ

$x = X + \sigma$ は $G_{X,\sigma}(x)$ の変曲点になっています。(1) を二回微分して $x = X + \sigma$ を代入すれば確認できます。

ガウス分布は全範囲にわたって積分すると 1 になるように規格化されています。 $X - \sigma \leq x \leq X + \sigma$ の範囲で積分すると、0.6826... という値になるような幅が σ です。

通常、ガウス分布の幅はこの σ を用いて表されます。したがって、 σ は幅のパラメータとも呼ばれます。

半値全幅

もうひとつ，ガウス分布の幅を表すのによく用いられるものがあります．それが半値全幅 (FWHM - Full Width at Half Maximum) です．

FWHM は図のようにガウス分布の最大値のちょうど半分の値をとるところの幅になります．

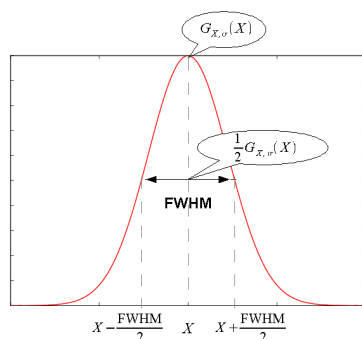


図 2 FWHM

σ と FWHM の関係

それでは σ と FWHM がどのような関係になっているのか見てみることにします．

まず，FWHM の定義から

$$G_{X,\sigma}\left(X + \frac{\text{FWHM}}{2}\right) = \frac{1}{2}G_{X,\sigma}(X) \quad (2)$$

が成り立ちます．(2) に (1) を代入して

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\text{FWHM}^2}{8\sigma^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\exp\left(-\frac{\text{FWHM}^2}{8\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{FWHM}^2}{8\sigma^2} = \ln 2$$

$$\text{FWHM}^2 = 8\sigma^2 \ln 2$$

FWHM は幅を表すので正号をとって

$$\text{FWHM} = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \quad (3)$$

となります．

式 (3) は大雑把に計算すると

$$\text{FWHM} \simeq 2.35\sigma$$

です．もっと大雑把に言えば，FWHM は σ の約二倍です．この関係は覚えておくと良いでしょう．