∫ e^(-ikx)/(x-c)dx の計算

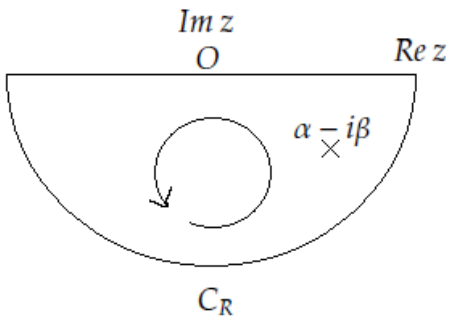
クロメル@物理のかぎプロジェクト

2011-06-08

この記事では，$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-ikx}}{x-\alpha+i\beta}dx$ ただし，$(\beta > 0)$ の値を求めます．
それには，複素積分の知識を用います．

$$\left(\int_{C_R} + \int_{\infty}^{-\infty}\right) f(z)\ dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\alpha-i\beta} f(z) \tag{1}$$

ですね．Jordan の補助定理というものを用いるには，図の様に積分のループは下半面にとります．



すると，$\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ となり簡単になります．
よって，$\mathrm{Res}_{z=\alpha-i\beta} f(z)$ を計算すればこの問題は解決します．
それは，

$$\mathrm{Res}_{z=\alpha-i\beta} f(z) = \lim_{z\to\alpha-i\beta}(z-\alpha+i\beta)\frac{e^{-ikz}}{z-\alpha+i\beta} = e^{-ik\alpha-k\beta} \tag{2}$$

となります．
よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x-\alpha+i\beta}dx = -2\pi i e^{-ik\alpha-k\beta}$$

が求まりました．それでは今日はこの辺で，お疲れ様でした．