サイクロイド

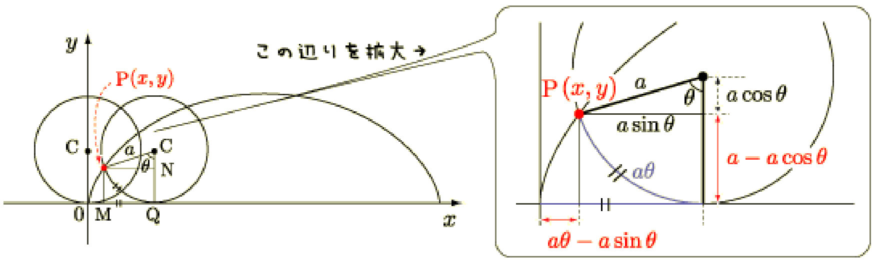
CO @物理のかぎプロジェクト

2005-03-14

ここではサイクロイドについて解説します．

サイクロイドとは？

サイクロイドは，ある直線上で円板を滑ることなく転がしたときに円板 (のふち) 上のある一点が描く軌跡です．

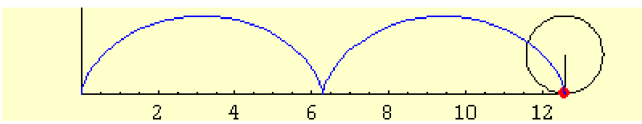


数学的に言えば，円 C (半径 a) が x 軸に接しながら回転するとき，その周上に固定された点 P の軌跡です．数式であらわすと

$$x = a(\theta - \sin\theta) \tag{1}$$
$$y = a(1 - \cos\theta) \tag{2}$$

です．

実際に円盤を滑ることなく転がしたときの軌跡を，アニメーションで見てみましょう．



サイクロイド曲線の性質

サイクロイド曲線が持つおもな性質をみてみましょう．

弧の長さ

(1),(2) で表されるサイクロイドが描く弧の長さ L を求めてみます.
弧の微小部分の長さ ds は次のように書けます.

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dy^2 + dx^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\ d\theta
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(3) 式に (1),(2) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
ds &= a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\ d\theta \\
&= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\ d\theta \\
&= a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\ d\theta \\
&= 2a|\sin\frac{\theta}{2}|\ d\theta
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となります．2 行目から 3 行目への変形に三角関数の半角の公式 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いました．(4) 式を 0 から 2π まで積分すれば弧の長さ L が得られます.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} ds \\
&= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}\ d\theta \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 8a
\end{aligned}
\tag{5}
$$

より，弧の長さは $L = 8a$ となることが分かりました.

面積

(1),(2) で表されるサイクロイドが描く曲線と x 軸に囲まれる部分の面積を求めてみます.
面積 S は次のように表されます.

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y dx \\
&= \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(1),(2) 式を (6) 式に代入して

$$\begin{aligned}
S &= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= 3\pi a^2 \qquad (7)
\end{aligned}$$

となるので，面積は $S=3\pi a^2$ であることが分かりました．

サイクロイドと物理

ここまではサイクロイドの数学的な説明をしてきました．サイクロイドは数学的に見ても美しい曲線です．これに物理を加えるとさらに興味深い話がたくさん出てきます．サイクロイド振り子 (ホイヘンス振り子)， 最速降下曲線 などの記事は物理の中に現れるサイクロイド曲線の有名なものです．ぜひ併せてお読みください！