

# 定数係数 1 階線形微分方程式

おこめ・崎間@物理のかぎプロジェクト

2005-01-01

微分方程式というのは、その名の通り方程式に微分が入っている、つまり導関数が入っている方程式のことです。いろいろな形（変数分離形 など）があるのですが、ここではつぎのようなものを学びます。  $a$  を定数、  $Q(x)$  をある連続な関数とすると、  $x$  の関数である未知関数  $y$  と、その導関数  $dy/dx$  に関して 1 次式である、

$$\frac{dy}{dx} + ay = Q(x) \quad (1)$$

のうな形で表される微分方程式です。これを、定数係数 1 階線形微分方程式といいます。この形の微分方程式について、これからお話します（え、なぜかって？そりゃあ、よく使うからですよ）。

## 定数係数 1 階線形微分方程式の解の公式

いきなりですが、いま考えている微分方程式の解の公式を示します。式 (1)

$$\frac{dy}{dx} + ay = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-ax} \left\{ \int e^{ax} Q(x) dx + C \right\} \quad (2)$$

で与えられます。ここで  $C$  は任意定数です。

未知関数  $y$  についての微分方程式を「解く」とは、おおざっぱに言うと  $y =$  の形に持って行く、ということです。ですから、式 (1) が式 (2) に変形できることが分かれば、これはもう、いつでも解けるわけです。といっても、こんな公式を丸暗記していたら大変です。手順を理解し、いつでも導出できるようにすることが重要です。

## 導出

ではここで、式 (2) を導出してみます。まず、積分を簡単にするために式 (1) の左辺

$$\frac{dy}{dx} + ay$$

を

$$\frac{d}{dx}F(x)$$

のような、「ある一つの関数  $F(x)$  の微分」の形に変形することを考えます．そのために，式 (1) の両辺に  $e^{ax}$  をかけますと

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + ae^{ax}y = e^{ax}Q(x)$$

となります．ここで， $e^{ax}$  の微分が  $ae^{ax}$  となる性質を思い出します．すなわち上式は

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)y = e^{ax}Q(x) \quad (3)$$

と変形できることとなります．ここまで，よろしいでしょうか．

さらにもう一つ，積の微分公式

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

を式 (3) の左辺に適用します．すると

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)y = \frac{d}{dx}(e^{ax}y)$$

がいえます．これは最初目指していた形です．ですから結局，式 (3) は

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = e^{ax}Q(x)$$

という形になるのです．ここまでくれば簡単，あとは両辺を  $x$  で積分して

$$e^{ax}y = \int e^{ax}Q(x) dx + C \quad (4)$$

が得られます．ここで  $C$  は任意定数です．左辺を「ある一つの関数  $F(x)$  の微分」という形に変形したかった理由は，このように両辺を一気に積分したかったからです．この方法は一般的に良く使うテクニックですので，憶えておいて損はないでしょう．

最後に，式 (4) の両辺に  $e^{-ax}$  をかけますと，

$$y = e^{-ax} \left\{ \int e^{ax}Q(x) dx + C \right\}$$

という，最初に示した式 (2) が得られるのです．

## 解の解釈

補足です． $\frac{dy}{dx} + ay = Q(x)$  において  $Q(x) = 0$  の場合，すなわち

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

の場合があります．これは同次方程式と呼ばれ，**変数分離形** になります．他方， $Q(x) \neq 0$  の場合は非同次方程式と呼ばれます．同次方程式の一般解  $Ce^{-ax}$  ( $Q(x)$  の形と独立な解) と，非同

次方程式の特殊解  $e^{-ax} \int e^{ax} Q(x) dx$  ( $Q(x)$  の形に依存する解) の線形結合が、式 (2) の一般解になっています。

## 例題

それでは、簡単な例題を示しておきます。

### 例題 1

つぎの定数係数 1 階線形微分方程式 (長い名前だ...)

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 6e^x$$

の一般解を求めます。まず、さきほどの導出の手順にしたがって、両辺に  $e^{5x}$  をかけます。すると

$$\frac{d}{dx} (e^{5x} y) = 6e^{6x}$$

となります (ここで一気に積の微分公式による変形も行っています)。上式の両辺を  $x$  で積分して

$$e^{5x} y = \int 6e^{6x} dx + C$$

となり ( $C$  は任意定数)、さらに両辺に  $e^{-5x}$  をかけると

$$\begin{aligned} y &= e^{-5x} \left\{ \int 6e^{6x} dx + C \right\} \\ &= e^{-5x} \{ e^{6x} + C \} \\ &= e^x + Ce^{-5x} \end{aligned}$$

という一般解を得ます。

### 例題 2

速さ  $v$  に比例する抵抗が働くとき、質点の鉛直方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -\kappa v + mg$$

と表せます。ここで  $m$  を質点の質量、 $g$  を重力加速度としています。この運動方程式は **変数分離形** として解くこともできますが、定数係数 1 階線形微分方程式であるとも言えますので、これまでの方法で解いてみます。

式を少し変形して

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\kappa v}{m} = g$$

両辺に  $e^{\kappa t/m}$  をかけ、積の微分公式から整理すると

$$\frac{d}{dt} (e^{\kappa t/m} v) = g e^{\kappa t/m}$$

両辺を  $t$  で積分して

$$e^{\kappa t/m} v = \int e^{\kappa t/m} g dt + C$$

を得，両辺に  $e^{-\kappa t/m}$  をかけると

$$\begin{aligned} v &= e^{-\kappa t/m} \left\{ \int e^{\kappa t/m} g dt + C \right\} \\ &= C e^{-\kappa t/m} + \frac{mg}{\kappa} \end{aligned}$$

という速度の一般解を得ます．ここで  $C$  は任意定数です．ちなみにこういった任意定数は，初期条件に依って決まります．この例題について詳しくは，[抵抗力のある落下運動](#) をご覧ください．