フーリエ変換の実例

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-10-09

この記事では，フーリエ変換，フーリエ逆変換の実例について書いてみました．

フーリエ変換

これから

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos \frac{n\pi}{2} t & (-1 \leq t < 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases} \tag{1}$$

（ただし n は非負の整数）のフーリエ変換を求めます．その前に関数の形を確認しておきましょう．

フーリエ変換の公式は，

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F} f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \tag{2}$$

フーリエ逆変換もついでに書いておくと，

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1} F(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{3}$$

です．

さっそく，フーリエ変換を考えてみましょう．簡単の為，$\alpha \equiv \frac{n\pi}{2}$ としておきます．

$$
\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \mathcal{F} f_n(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^{1} \cos(\frac{n\pi}{2} t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{i(\alpha-\omega)t} + e^{-i(\alpha+\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{2} \Big[\frac{e^{i(\alpha-\omega)t}}{i(\alpha-\omega)} - \frac{e^{-i(\alpha+\omega)t}}{i(\alpha+\omega)} \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2i} \Big[\frac{(\alpha+\omega)e^{i(\alpha-\omega)t} - (\alpha-\omega)e^{-i(\alpha+\omega)t}}{\alpha^2-\omega^2} \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2i(\alpha^2-\omega^2)} \Big\{ (\alpha+\omega)\big(e^{i(\alpha-\omega)} - e^{-i(\alpha-\omega)}\big) - (\alpha-\omega)\big(e^{-i(\alpha+\omega)} - e^{i(\alpha+\omega)}\big) \Big\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2} \Big\{ (\alpha+\omega) \frac{e^{i(\alpha-\omega)} - e^{-i(\alpha-\omega)}}{2i} + (\alpha-\omega) \frac{e^{i(\alpha+\omega)} - e^{-i(\alpha+\omega)}}{2i} \Big\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2} \big\{ (\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega) + (\alpha-\omega)\sin(\alpha+\omega) \big\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2} \big\{ \alpha(\sin(\alpha-\omega) + \sin(\alpha+\omega)) + \omega(\sin(\alpha-\omega) - \sin(\alpha+\omega)) \big\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2} \big(2\alpha \sin\alpha \cos\omega - 2\omega \cos\alpha \sin\omega \big) \\
&= \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2} \big(n\pi \sin\frac{n\pi}{2} \cos\omega - 2\omega \cos\frac{n\pi}{2} \sin\omega \big)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで，$n : odd$ を n が奇数の時，$n : even$ を n が偶数の時とすると，

$$
\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & (n : odd) \\ 0 & (n : even) \end{cases}
\tag{5}
$$

$$
\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n : odd) \\ (-1)^{n/2} & (n : even) \end{cases}
\tag{6}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2} (-1)^{(n-1)/2} n\pi \cos\omega & (n : odd) \\ \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2} (-1)^{(n-2)/2} 2\omega \sin\omega & (n : even) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2} (-1)^{(n+1)/2} n\pi \cos\omega & (n : odd) \\ \frac{1}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2} (-1)^{n/2} 2\omega \sin\omega & (n : even) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となりました．これが，関数 $f_n(t)$ のフーリエ変換です．$n \neq 0$ の時は，$\omega = \pm\frac{n\pi}{2}$ で極（分母がゼロになり，発散すること）が出てきそうですが，$\omega^2 - (\frac{n\pi}{2})^2 = (\omega - \frac{n\pi}{2})(\omega + \frac{n\pi}{2})$ というように一次の極なのと，

ちょうど，そこでサインないしコサインが一次の零点をもつので，これは，除去可能な特異点です．よって，そこでは緩やかなピークを持ちます．実は，$n=0$ の時の $t=0$ も除去可能な特異点です．（ $2\omega\sin\omega$ が二次の零点のため，分母が 2 次の極を持つが，やはり除去可能な特異点となる.）下にフーリエ変換したもののグラフを書きます．横軸は，ω です．

フーリエ逆変換（n が奇数の時）

さて，フーリエ変換ができたところで，フーリエ逆変換を行い，元に戻るか見てみましょう．複素関数の積分法を必要とします．まず，n が奇数のとき，かつ，$t+1\geq 0$ つまり，$-1\leq t$ の時[*1] を積分してみ

ます.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2}n\pi}{\omega^2-\alpha^2}\cos\omega e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{c}{2}\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}}{(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega}}{(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega\} \\
&= \frac{c}{2}(I_n + I'_n)
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$c=\frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}$ としました．I_n は下図のような積分路をとれば求められます．

積分路が囲む領域に特異点がないので，以下の様な積分となります．

$$\Big(\int_C + \int_L + \int_{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega = 0 \tag{9}$$

ここで積分路 C を計算します．$\omega = Re^{i\theta}$ と置くと，$d\omega = iRe^{i\theta}d\theta$ となるから，

$$\begin{aligned}
\Big|\int_C \frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\Big| &= \Big|\int_0^{\pi} \frac{e^{i(1+t)R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}-\alpha^2}iRe^{i\theta}d\theta\Big| \\
&< \frac{R}{R^2-\alpha^2}\int_0^{\pi} e^{-R(t+1)\sin\theta}d\theta \\
&< \frac{R}{R^2-\alpha^2}\int_0^{\pi} e^{-2R(t+1)\theta/\pi}d\theta \\
&< \frac{R}{R^2-\alpha^2}\Big[\frac{-\pi}{2R(t+1)}e^{-2R(t+1)\theta/\pi}\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2(t+1)(R^2-\alpha^2)}(1-e^{-2R(1+t)}) \\
&\overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned} \tag{10}$$

一行目から二行目は，位相部分を無視して，分母は最小になるように展開しました．二行目から三行目は，下図の様に $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ において，$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$ となることを利用しました．

*1 t+1 がゼロ以上という条件は，後述の式 (10) の指数関数の指数 $-R(t+1)\sin\theta$ が複素平面の上半面で負になり，積分路 C での積分がゼロになるように選びました．

積分路 ε_1 については，その留数に時計回りなのでマイナスが掛かって，更に半周しかしないので 2π ではなく π が掛かって，

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_1}\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega &= -i\pi\mathrm{Res}_{\omega\to\alpha}\Big[\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}\Big]\\ &= -i\pi\mathrm{lim}_{\omega\to\alpha}(\omega-\alpha)\frac{e^{i(1+t)\omega}}{(\omega-\alpha)(\omega+\alpha)}\\ &= -i\pi\frac{e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha}\end{aligned} \tag{11}$$

積分路 ε_2 についても同様に，

$$\int_{\varepsilon_2}\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega = i\pi\frac{e^{-i(1+t)\alpha}}{2\alpha} \tag{12}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}\omega &= \int_L\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\\ &= \Big(-\int_C-\int_{\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\\ &= i\pi\frac{e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha}-i\pi\frac{e^{-i(1+t)\alpha}}{2\alpha}\\ &= -\frac{\pi}{\alpha}\frac{e^{i(1+t)\alpha}-e^{-i(1+t)\alpha}}{2i}\\ &= -\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\alpha)\end{aligned} \tag{13}$$

となります．これはつまり，$\alpha=\frac{n\pi}{2}$ $c=\frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}$ でしたから，

$$\begin{aligned}I_n &= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega\\ &= -\frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\alpha)\\ &= \frac{n(-1)^{(n-1)/2}}{2}\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\frac{n\pi}{2})\\ &= \frac{n\pi(-1)^{(n-1)/2}}{2\alpha}(-1)^{(n-1)/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t)\\ &= \cos(\frac{n\pi}{2}t)\end{aligned} \tag{14}$$

次に行きましょう．次は，n が奇数，かつ，$t+1<0$ つまり，$t<-1$ の時です．積分路は，無限遠の半円について，$e^{-\sin(t+1)\theta}$ の指数が負になる領域 $\pi\leq\theta\leq 2\pi$ より，下半面（下図参照）になります．

これは留数の積分方向は変わらず，積分路 L の向きだけが変わるので，

$$I_n = -\cos(\frac{n\pi}{2}t) \tag{15}$$

となります．よって，まとめると，

$$I_n = \begin{cases} -\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t \leq -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1 \leq t) \end{cases} \tag{16}$$

今求めたのは

$$I_n = \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \tag{17}$$

でしたが，一方，

$$I'_n = \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \tag{18}$$

も求めないと，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2}(I_n + I'_n) \\ &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{i\omega}+e^{-i\omega})}{2(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{19}$$

は求まりません．よって，求めます．n が奇数，かつ $t-1 \geq 0$，つまり，$t \geq 1$ の時，積分路は下図のようになって，

$$\begin{aligned} I'_n &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t-1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= c\frac{\pi}{\alpha}\sin(t-1)\alpha \\ &= \frac{n\pi(-1)^{(n-1)/2}}{2\alpha}\sin(\frac{n\pi}{2}t - \frac{n\pi}{2}) \\ &= -\cos\frac{n\pi}{2}t \end{aligned} \tag{20}$$

さっきと同様に，n が奇数，かつ $t-1<0$，つまり，$t<1$ の時，積分路は下図のようになり，式 (20) とは，符号が変わるので，

$$I'_n = \cos\frac{n\pi}{2}t \tag{21}$$

つまり，

$$I'_n = \begin{cases} \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t < 1) \\ -\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (1 \leq t) \end{cases} \tag{22}$$

よって，まとめると下図のようになります．

つまり，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2}(I_n + I'_n) \\ &= \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1 \leq t < 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

ふぅ，これで逆変換の内，n が奇数の時を求めることができました．次は偶数の時です，頑張りましょう．

フーリエ逆変換（n が偶数の時）

さて，n が偶数，かつ $-1 \leq t$ の時，$f_n(t)$ のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f_n(t) &= F_n(\omega) \\ &= \frac{2}{\omega^2 - (\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{n/2}\omega\sin\omega \end{aligned}$$

でした．今求めたいのは，$d = \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi} = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}$ と置いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}F_n(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2(-1)^{n/2}\omega\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega - \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= d\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega - d\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{I_n - I'_n}{2i} \end{aligned}$$

まず，I_n を求めましょう．

$$\begin{aligned} I_n &= d\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2 - (\frac{n\pi}{2})^2}\omega e^{i\omega}e^{i\omega t}d\omega \\ &= d\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2 - \alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{24}$$

となります．下図のように積分路を取ると，

$$\Big(\int_L+\int_C+\int_{\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega=0$$

となります．まず，積分路 C を評価します．$\omega=Re^{i\theta}$ と置けば，$d\omega=iRe^{i\theta}d\theta$ より，

$$\begin{aligned}
\Big|\int_C\frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega\Big| &= \Big|\int_C\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\Big| \\
&= \Big|\int_0^\pi\frac{Re^{i\theta}e^{iR(1+t)(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}-\alpha^2}iRe^{i\theta}d\theta\Big| \\
&\le \int_0^\pi\frac{R^2}{R^2-\alpha^2}e^{-R\sin\theta}\theta \\
&\le \int_0^\pi\frac{R}{R^2-\alpha^2}e^{-2R\theta/\pi}\theta \\
&= \frac{R^2}{R^2-\alpha}\frac{-\pi}{2R}(e^{-2R}-e^0) \\
&= \frac{\pi R^2}{2R(R^2-\alpha^2)}(1-e^{-2R}) \\
&\overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned} \tag{25}$$

積分路 ε_1 について，前と同じく時計回りで半周することから留数に $-i\pi$ を掛けたものが，積分値となります．

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_1}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega &= -i\pi\mathrm{Res}_{\omega\to\alpha}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2} \\
&= -i\pi\mathrm{lim}_{\omega\to\alpha}(\omega-\alpha)\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{(\omega-\alpha)(\omega+\alpha)} \\
&= -i\pi\frac{\alpha e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha} \qquad = \frac{-i\pi}{2}e^{i(1+t)\alpha}
\end{aligned} \tag{26}$$

同様に，積分路 ε_2 も求めると，

$$\int_{\varepsilon_1}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega=\frac{-i\pi}{2}e^{-i(1+t)\alpha} \tag{27}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega &= \int_L\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\
&= \Big(-\int_C-\int_{\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\
&= \frac{i\pi}{2}(e^{i(1+t)\alpha}+e^{-i(1+t)\alpha}) \\
&= i\pi\cos(1+t)\alpha \\
&= i\pi(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{28}$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= d\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\
&= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\
&= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}i\pi(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\
&= i\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

となります．同様に，n が偶数，かつ $t<-1$ の時，積分路は下図のようになります．

ここでも，留数の積分方向は変わらず，積分路 L の向きが変わるので，

$$
I_n = -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) \tag{30}
$$

よって，まとめると，

$$
I_n = \begin{cases} -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t<-1) \\ i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1\le t) \end{cases} \tag{31}
$$

次に，n が偶数，かつ，$0\le t-1$ つまり $1\le t$ の時，I'_n を求めます．$d=\frac{(-1)^{n/2}}{\pi}$ として，積分路は下図のようになり，

$$
\begin{aligned}
I'_n &= d\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(t-1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{2}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{n/2}\omega e^{-i\omega}e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned}
\tag{32}
$$

を考えます．これが最後ですので，安心してください．これは，式 (28) の下から二行目の $(1+t)$ を $(t-1)$ で置き換えたものに等しいので，

$$
\begin{aligned}
I'_n &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}i\pi\cos((t-1)\alpha) \\
&= i(-1)^{n/2}(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\
&= i\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

同様に，n が偶数の時，かつ，$t-1<0$ つまり $t<1$ の時，積分路は下図のようになって，積分路 L の向きが反転するので，

$$
\begin{aligned}
I_n' &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}(-i\pi)\cos((1-t)\alpha) \\
&= -i(-1)^{n/2}(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\
&= -i\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{34}
$$

よって，まとめると，

$$
I_n' = \begin{cases} -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t < 1) \\ i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (1 \le t) \end{cases} \tag{35}
$$

となります．いよいよ最後の仕上げです．$-1 \le t < 1$ の時，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2(-1)^{n/2}\frac{\omega}{\omega^2-\alpha^2}\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{I_n - I_n'}{2i} \\
&= \frac{i\cos(\frac{n\pi}{2}t) - (-i\cos(\frac{n\pi}{2}t))}{2i} \\
&= \frac{2i\cos(\frac{n\pi}{2}t)}{2i} \\
&= \cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{36}
$$

さらに，t が $-1 \le t < 1$ 以外の時は，$\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) = 0$ となるので，まとめると（下図も参照のこと），

$$
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1 \le t < 1) \\ 0 & (1 \le t) \end{cases} \tag{37}
$$

よって，ついに今回の例において，ある関数 $f_n(t)$ のフーリエ変換 $F_n(\omega)$ のフーリエ逆変換が，元の関数 $f(t)$ に等しいことが分かりました．今日はこの辺で，それでは．