フーリエ変換の三連続積と畳み込み積分の拡張

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2012-10-31

以前，相関関数と畳み込み積分のフーリエ変換 でフーリエ変換の２つの積は，畳み込み積分になることを学びましたが，それでは，３つの積はどうなるのでしょうか．短い記事です．

結論から言います．フーリエ変換すると３つの積になる関数は，

$$\begin{aligned} f(t) = (f_1 * (f_2 * f_3))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f_1(t-t_1)(f_2 * f_3)(t_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f_1(t-t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_2(t_1-t_2) f_3(t_2) \end{aligned} \tag{1}$$

という関数です．確かめてみましょう．上の式をフーリエ変換してみます．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_1(t-t_1) f_2(t_1-t_2) f_3(t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_3(t_2) e^{-i\omega t_2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f_2(t_1-t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_1(t-t_1) e^{-i\omega(t-t_1)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_3(t_2) e^{-i\omega t_2} \int_{-\infty}^{\infty} d(t_1-t_2) f_2(t_1-t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \int_{-\infty}^{\infty} d(t-t_1) f_1(t-t_1) e^{-i\omega(t-t_1)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_3(t_2) e^{-i\omega t_2} \int_{-\infty}^{\infty} d(t_1-t_2) f_2(t_1-t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \mathcal{F}f_1(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 f_3(t_2) e^{-i\omega t_2} \mathcal{F}f_2(\omega) \mathcal{F}f_1(\omega) \\ &= \mathcal{F}f_3(\omega) \mathcal{F}f_2(\omega) \mathcal{F}f_1(\omega) \end{aligned} \tag{2}$$

以上，今日はここまで．お疲れ様でした．