物理学ハンドブック

Ver. 0.17.1

物理のかぎしっぽ
http://www12.plala.or.jp/ksp/

2006 年 9 月 20 日

目次

第 1 章

力学

基礎物理学のなかで特に基礎的なものが力学である．力学は物理学を学ぶうえでの基本的考え方が詰まっており，物理学の出発点となる．力学は光速度に比べてゆっくりな運動を記述する古典力学と，光速度に近い運動を記述する相対論的力学の二つに分かれている．古典力学は，最初の状態さえ分かれば，後のことはすべて決められるという因果律が基本になっている．

1.1 ニュートンの運動方程式

アイザック・ニュートンは物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ が，その物体が受ける力 $\boldsymbol{F}$ に比例し，その物体の質量 m に逆比例することを発見した．つまり

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

である．これを**運動方程式**という．加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ を時間で一階微分したものなので，

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1.2}$$

と書ける．また，加速度 $\boldsymbol{a}$ は位置 $\boldsymbol{x}$ を時間で二階微分したものでもあるので，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.3}$$

と書ける．これが微分形．これさえあれば何でも分かるのだ．この微分方程式をなんとかして解いて，

$$x = \text{なんとか}$$

という形にもっていくことができれば，胸を張って「力学問題が解けた」ということができる．

1.2 等加速度運動

加速度一定の運動を**等加速度運動**という．等加速度運動では，t 秒後の速度と位置は

$$\text{速度：}\qquad v = at + v_0 \tag{1.4}$$

$$\text{位置：}\qquad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \tag{1.5}$$

と表せる．v_0 と x_0 はそれぞれ $t = 0$ のときの速度と位置であり，これらを初期条件という．等加速度運動の式が言っているのは,「（等加速度で運動している限り）初期条件がわかれば t 秒後の速度と位置がわかります，まかせてください」ということである．

これらは公式として覚えてもよいが，少々複雑な形をしている．運動方程式を立てて積分すれば簡単に導くことができる．例として，質量 m のボールをまっすぐ投げ上げたときの運動を考えよう．上向きに x 軸をとりボールに働く力

は重力のみだとして，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -mg \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -g$$

この両辺を積分すると，積分定数を C_1 として

$$\int \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = -\int g\,\mathrm{d}t + C_1 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -gt + C_1$$

ここで $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ というのは速度 v のことだから，

$$v = -gt + C_1$$

と書き換えられる．積分定数 C_1 を v_0 とおけば

$$v = -gt + v_0 \tag{1.6}$$

となり，式 (1.4) ができあがる．式 (1.5) を求めるには，これをさらにもう一回積分する．

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-gt + v_0)\,\mathrm{d}t + C_2 \qquad \therefore\ x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

積分定数 C_2 を x_0 とおけば

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 \tag{1.7}$$

となり，式 (1.5) のできあがりである．

1.3　力積と運動量

1.3.1　力積

物体に働く力の計り方の一つが，**力積**である．力積は

$$\text{力} \times \text{物体に及ぼした時間}$$

で定義される．物体に力積が加わると，物体の運動量が増大する．

1.3.2　運動量

運動量は質量と速度を掛けたもので，普通 $\boldsymbol{p}$ で表す．

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.8}$$

上式の両辺を時間 t で微分すると運動方程式そのもの．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

運動量は方向と大きさを持つベクトル量である．

1.3.3　はねかえり係数（一つの物体）

ある物体が衝突してはねかえったとき，はねかえる前の速度とはねかえった後の速度の比を**はねかえり係数**といい，e で表す．例えば，ボールが速さ 15 で地面に衝突してはねかえった後の速さが 5 になったとき，はねかえり係数は $e = 5/15 \simeq 0.33$ となる．はねかえる前の速さを v ，はねかえった後の速さを v' とすると

$$e = \frac{v'}{v}$$

とはねかえり係数を決めることができる．

1.3.4 はねかえり係数（二つの物体）

二つの物体 A と B を考える．A が v_{A} の速さで v_{B} の速さで動く B に衝突し，A の速さが v'_{A}，B の速さが v'_{B} になったときのはねかえり係数 e は

$$e = \frac{v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}$$

となる．これは，どちらかの物体の立場から見てみるとわかりやすい．A から見れば，最初は $v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}$ の速さで B に近づき，衝突する．その後は $v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}$ の速さで B から遠ざかって見える．

1.4 仕事とエネルギー

1.4.1 仕事

物体に働く力の計り方の一つが，**仕事**である．仕事は

$$\text{力} \times \text{物体の動いた距離}$$

で定義される．物体に仕事が加わると，物体のエネルギーが増大する．

1.4.2 運動エネルギー

質量 m の物体が速さ v で動いているときの**運動エネルギー** K は

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

である．「運動」なので動いていなかったら当然 $K = 0$ ．運動エネルギーは方向を持たないスカラー量である．また，運動量の大きさ p を使うと運動エネルギーは

$$K = \frac{p^2}{2m} \tag{1.9}$$

で表せる．

1.4.3 ポテンシャルエネルギー

ポテンシャルエネルギー（potential energy）は場によって蓄えられたエネルギーのこと．その場のなかで高いところにあるものほど高いポテンシャルエネルギーを持つ．ポテンシャルエネルギーは

$$U = -\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

で定義される．右辺は仕事を表している．マイナスが付いているのは，ポテンシャルエネルギーを蓄えるには仕事をしなければいけないから．

$$\text{万有引力のポテンシャルエネルギー：}\quad U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\text{バネのポテンシャルエネルギー：}\quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

1.4.4 ポテンシャルエネルギーと力の関係

系のポテンシャルエネルギー U と力 F ，位置 x は

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \quad \longrightarrow \quad U = -\int F\,\mathrm{d}x$$

という関係にある．これをベクトル解析のナブラ演算子 ∇ やグラディエント grad で表すと

$$
\begin{aligned}
F &= -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U && (1.10)\\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} && (1.11)
\end{aligned}
$$

となる．

1.5　重心座標と相対座標

1.5.1　重心座標

質量 m_1 の座標を $\boldsymbol{r}_1$，質量 m_2 の座標を $\boldsymbol{r}_2$ とすると，**重心座標**（barycentric coordinate）$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ は

$$
m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{r}_\mathrm{G} \qquad \therefore\ \boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{1.12}
$$

と定義される．$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ は質量中心の座標を意味している．一般に質量が m_i（$i = 1, 2, \ldots, N$）の N 個の質点が $\boldsymbol{r}_i$ に分布しているとき，重心座標は

$$
\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1.13}
$$

で与えられる．

1.5.2　相対座標

質量 m_1 の座標が $\boldsymbol{r}_1$，質量 m_2 の座標が $\boldsymbol{r}_2$ のとき，**相対座標**（relative coordinate）$\boldsymbol{r}$ は次式で定義される．

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{1.14}
$$

1.5.3　換算質量

2 体系の相対座標の運動方程式は

$$
\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{1.15}
$$

と書ける．ここで

$$
\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{1.16}
$$

を**換算質量**（reduced mass）という．

1.6　円運動

1.6.1　角速度

角速度は極座標の θ が時間とともに変化する割合．時刻 t での**角速度**（angular velocity）ω は

$$
\omega = \frac{d\theta}{dt}
$$

で与えられる．

1.6.2　等速円運動の運動方程式

速度 v で表すと

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

角速度 ω で表すと

$$mr\omega^2 = F$$

1.6.3　角運動量

質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と，運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ のベクトル積を**角運動量**（angular momentum）$\boldsymbol{l}$ という．

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

角運動量はベクトル積であるから， $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{r}$ にも $\boldsymbol{p}$ にも垂直である．角運動量の時間変化は，合成関数の微分より

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ であるから $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} = 0$．したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

である．右辺の $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を原点に対する**力のモーメント**（moment of force）と呼び，$\boldsymbol{N}$ で表す．

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \text{:力のモーメント} \tag{1.17}$$

すなわち，ある時刻に質点が原点に対してもつ角運動量の時間微分は同時刻に質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ の原点に対するモーメントに等しい．

1.7　ラザフォード散乱

相対座標運動方程式

1.8　ダランベールの原理

運動方程式 $ma = F$ をちょこっと変形してやると

$$F - ma = 0$$

という形になる．これをただ単に移行しただけとは思わず，F という力と $-ma$ という力がつりあっていると考える．この $-ma$ という力を慣性力という．慣性力を導入して，動力学の方程式を静力学の問題と考えることを**ダランベールの原理**という．束縛力 S も含めて仮想仕事を考え，

$$(F + S - ma)\,\delta x = 0$$

と書くこともある．自由度が増えたらそれらを足し合わせればいい．

$$\sum (F_i + S_i - m_i\ddot{r}_i)\,\delta r_i = 0$$

ダランベールの原理は座標系が直線方向に加速したときに働く．電車が急に止まってコケそうになるあれ．

1.9　ラグランジュアン

ニュートンの方程式は $\boldsymbol{F}=\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$ であるが，左辺の力は（保存力であれば）ポテンシャルエネルギー U で表して $\boldsymbol{F}=-\nabla U$ とも書ける．また，右辺の $m\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ を使って $m\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)=\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ と書ける．以上より，ニュートンの運動方程式は

$$-\nabla U=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

と表せる．これをベクトルの成分で表すと

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{dp_x}{dt},\quad -\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{dp_y}{dt},\quad -\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{dp_z}{dt}$$

である．ここで添字を x,y,z とは書かずに $i=1,2,3$ で書くことにすると

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{dp_i}{dt}$$

となる．右辺はエネルギーを使って表せているので右辺もエネルギーで表すことを考える．運動エネルギー $K=\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2=\dfrac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$ を v_i で偏微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial v_i}=mv_i=p_i$$

であるから，これを式 (1.9) に代入すると $-\dfrac{\partial U}{\partial x_i}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial v_i}$ すなわち

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial v_i}-\left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)=0 \tag{1.18}$$

となる．ここで

$$L=K-U \tag{1.19}$$

なる量を導入する．これを**ラグランジュアン**という．すると式 (1.18) はもっと簡単な表現

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \tag{1.20}$$

で書ける．式 (1.20) はオイラー・ラグランジュの方程式または単にラグランジュ方程式と呼ばれる．

1.10　ハミルトニアン

エネルギーを座標と運動量で表したものをハミルトニアンという．ポテンシャル V のなかを運動する質量 m の粒子のハミルトニアン (全エネルギー) は，運動量を $\boldsymbol{p}$ として

$$H=\frac{p^2}{2m}+V$$

のように表される．

1.10.1　一般運動量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\qquad i=1,2,\cdots,f$$

一般運動量とラグランジアンでハミルトニアンを表すと

$$H=\sum_{i=1}^{f}p_i\,\dot{q}_i-L \tag{1.21}$$

1.10.2　正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, f \tag{1.22}$$

1.11　ポアソン括弧式

ある物理量 $X(q_1, \cdots, q_{3N}, p_1, \cdots, p_{3N}, t)$ を時間 t で微分すると，位置 q と運動量 p も時間の関数であることから

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right)$$

となる．右辺第 2 項にハミルトンの正準方程式を代入すると

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

となる．これを略して

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \{X, H\}$$

と書くことにする．この

$$\{X, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{1.23}$$

をポアソン括弧式という．

第 2 章

熱力学

水に熱を加えると温度が上がってお湯になる．この熱や温度というのはいったいなんなのだろう．重さや長さなら直接測ることができるが，熱は直接測ることができるだろうか．例えば温度計を使って熱を測っても，実際は温度計ないの液体の膨張を目盛りで測っているだけであり，熱そのものではない．実は，熱は物質を巨視的に扱った場合に生まれる概念なのである．熱とは，物質中の膨大な数の粒子の運動エネルギーであり，物質の状態を変化させるエネルギーの一形態である．

2.1 熱力学の基本法則

2.1.1 熱力学第 0 法則

2 つの物体の温度が変化しなくなったとき，**熱平衡**にあるという．「物体 A と物体 C が熱平衡にあり，同時に物体 B と物体 C が熱平衡にあるとき，物体 A と物体 B も熱平衡にある」という当然のことを保証するのが**熱力学第 0 法則**である．

2.1.2 熱力学第 1 法則

熱に関するエネルギー保存則が熱力学第一法則である．すなわち，「熱と仕事の和は保存する」．系全体のエネルギー U の変化 dU は，仕事 W の変化 $\varDelta W$ と熱量 Q の移動 $\varDelta Q$ の和で次式のように表される．

$$dU = \varDelta W + \varDelta Q$$

2.1.3 熱力学第 2 法則

「熱は高温部から低温部へ自発的に流れる」というのが熱力学第二法則である．可逆過程のエントロピー S は

$$dS = \frac{\varDelta Q}{T}$$

で定義され,

$$dS \geqq \frac{\varDelta Q}{T}$$

である．熱力学第 2 法則は反応が進行するかどうかをあらかじめ知るために，きわめて重要.

2.1.4 ボイル・シャルルの法則

十分希薄な気体に対して，体積を V，圧力を p，絶対温度を T，気体定数を R，気体の量を n モルとすると

$$pV = nRT$$

という式が成立することが経験的に分かっており，**ボイル・シャルルの法則**と呼ばれる．この法則が完全に成り立つ仮想的な気体を理想気体という．ボルツマン定数 k_B を導入し，対象にしている気体の分子数を N とすると次式のようにも書ける．

$$pV = Nk_BT$$

2.2　熱力学関数

2.2.1　エンタルピー

系のエンタルピー H はつぎのように定義される．

$$H = U + PV \tag{2.1}$$

系の内部エネルギーの変化 dU は

$$dU = \varDelta W + \varDelta Q$$

だったから，エンタルピーの変化は

$$dH = \varDelta W + \varDelta Q + PV \tag{2.2}$$

2.2.2　熱容量

系が dT の温度変化をするときに吸収する熱量を $\varDelta Q$ とすると，熱容量 C はつぎのように定義される．

$$C = \frac{\varDelta Q}{dT} \tag{2.3}$$

定積熱容量

体積が一定に保たれている系の熱容量を定積熱容量 C_V という．

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{2.4}$$

定圧熱容量

圧力が一定に保たれている系の熱容量を定圧熱容量 C_P という．

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \tag{2.5}$$

2.2.3　ヘルムホルツの自由エネルギー

内部エネルギー U，エントロピー S としてヘルムホルツの自由エネルギー F は次式で定義される．

$$F = U - TS \tag{2.6}$$

ここで体積は一定である．U, S, T は状態量であるので，F も状態量．状態の変化は F が小さい方へ進行し，F が極小な状態で平衡が実現する．準静的な微小変化では $dU = TdS - pdV$ だから

$$dF = -pdV - SdT \tag{2.7}$$

となる．また，全微分から

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT \tag{2.8}$$

と書ける．したがって

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{2.9}$$

がいえる．

2.2.4　ギブスの自由エネルギー

一定の温度と圧力のもとで，ギブスの自由エネルギー

$$G = F + pV = U - TS + pV \tag{2.10}$$

が定義される．定温低圧ではこのギブスの自由エネルギー G が極小のとき，平衡状態が実現する．準静的な変化に対しては

$$dG = Vdp - SdT \tag{2.11}$$

となる．また，全微分から

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp - \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT \tag{2.12}$$

と書ける．したがって

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \tag{2.13}$$

がいえる．

2.3　標準状態

熱力学の手法では，熱力学量の絶対量を決めることができない．そこである状態を基準とする．その基準とする状態を標準状態という．1 気圧，298.15K を標準状態とすることが多い．

2.4　相転移

温度が非常に低いときには相互作用によようるエネルギーが得するような配置（基底状態）が実現される．この状態が氷，つまり結晶の状態である．温度が高くなってくると分子は活発に運動し，ついに結晶が壊れてしまう．さらに温度を上げると分子はほぼ独立に動きまわり，全体としてランダムな配置になる．

2.5　ボルツマンの原理

$$\frac{d \log W(E)}{dE} = \frac{1}{k_B T}$$

k_B はボルツマン定数とよばれ，温度計の目盛の間隔を与える．こうしてきめられた T は絶対温度とよばれる．エントロピーに関する熱力学の関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$$

と比較して

$$S = k_B \log W(E)$$

と表す．

2.6　ステファン・ボルツマンの法則

物質のない真空中でも，熱エネルギーは放射の形で伝わる．単位面積あたりのエネルギー放射率を E ，温度を T とすると，熱を放射する物体に関わらず

$$E = \sigma T^4$$

である．温度放射は T^4 に比例する．比例定数 σ はステファン・ボルツマン定数と呼ばれ，その値は.

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ [\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}]$$

である．この値は統計力学から計算される．黒体とは入射された放射を完全に吸収する物体のことである．

2.7　マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{2.17}$$

第 3 章

電磁気学

万有引力に良く似た力，それがクーロン力．電磁気学はそういう力を扱う．

3.1　クーロンの法則

2 つの点電荷の間に働く力は**クーロンの法則**（Coulomb’s law）

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad [\mathrm{N}] \tag{3.1}$$

で表される．ε_0 は真空の誘電率と呼ばれ，$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ [\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)]$ である．クーロン力をベクトルで表記すると次式のようになる．

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{3.2}$$

3.2　電場

点電荷どうしが力を及ぼし合うとき，電荷から直接電荷へ作用するのではなく，電荷が**電場**（electric field）をつくり，電荷は電場から力を受けると考える．クーロンの法則から分かるように，電気量 Q の電荷がつくる電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3.3}$$

である．電場は向きと大きさをもつベクトル場である．そして電場にある電荷 q は，その電荷から

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{3.4}$$

なる力を受ける．また，電場は電位 V の傾きとして表される．その傾きはベクトル演算子のグラディエントを使って

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\mathrm{grad}\, V \\ &= -\nabla V \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

と表現することができる．

3.3　電位

電位（electric potential）

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{3.6}$$

はスカラー場 (電場はベクトル場) である．電場がわかっていれば，電位は

$$V = -\int E dr \tag{3.7}$$

と電場を積分してやれば求められる．

3.4　ガウスの法則

積分型

点電荷を囲む閉曲面を通って出ていく電気力線の本数は，点電荷のもつ電気量を ε_0 で割ったものに等しい．

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

これを**ガウスの法則**という．$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$ は微小面積 dS を垂直に通過する電気力線の本数を表している．

微分型

ベクトル解析の**ガウスの定理**

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_V \mathrm{div} \, \boldsymbol{E} \, dV$$

から，微小体積では

$$\mathrm{div} \, \boldsymbol{E} \, dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

q/dV を ρ と書けば

$$\mathrm{div} \, \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これはマクスウェルの方程式の 1 つ．微小体積の中に密度 ρ の電気量があれば，その周囲に ρ/ε_0 の電気力線 E が発散していることを表している．

3.5　電気双極子

短い距離をおいて固定された，大きさの等しいプラスとマイナスの点電荷を**電気双極子**という．

3.6　電流

電流とは電位の低い方から高い方へ電子が移動する現象．低い方から，なのは電子が負の電荷を持っているから．電子から見れば低い方が高いのだ．

3.7　電気回路

3.7.1　オームの法則

電位差 V [V]，抵抗 R [Ω]，電流 I [A] には

$$V = RI$$

という関係があり，これを**オームの法則**という．

3.7.2　コンデンサの 4 大公式

1. 電気量と電位の関係

$$Q = CV$$

2. 電気容量

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

3. 電場と電位

$$E = \frac{V}{d}$$

4. 静電エネルギー

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

3.8　磁場

この世には電荷は存在しているが，磁荷は存在しない (と考えられている)．電場は電荷によってつくられる．では磁場をつくるのはなんだろうか．それは動く電荷，すなわち電流である．無限に長い直線電流 I が距離 r の地点につくる磁場の大きさは

$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad [\mathrm{A/m}]$$

3.8.1　ローレンツ力

磁場のなかを動く電荷は磁場から力を受ける．この力を**ローレンツ力**といい，次式で表される．

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

さらに電場から受ける力 $q\boldsymbol{E}$ も加えればつぎのようになる．

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

3.8.2　磁束密度

3.8.3　ファラデーの法則

短い時間 $\mathit{\Delta} t$ 秒の間に針金が $\Delta\Phi$ 本の磁束を横切ると，1 秒あたりに横切る磁束の本数は $\Delta\Phi/\mathit{\Delta} t$ となるから，誘導起電力の大きさは

$$V = \frac{\Delta\Phi}{\mathit{\Delta} t}$$

となる．これを**ファラデーの法則**と呼ぶ．

3.9　マクスウェルの方程式

電気と，それによって生じる電場と磁場の関係を，簡潔な 4 つの方程式にまとめたのが**マクスウェルの方程式**である．ここで，電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{H}$，電束密度 $\boldsymbol{D}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$，電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{i}$ ．

1. 磁束密度の時間変化が，変化の方向を回転軸とする電場の渦をつくる．

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3.8}$$

2. 電束密度の時間変化が，変化の方向を回転軸とする磁場の渦をつくる．電流もまた磁場の渦をつくる．

$$\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{3.9}$$

3. 電荷があれば，電束密度がわきだす．
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3.10}$$

4. 磁場をわきださせるものはない．
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.11}$$

ただし，真空中では

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{3.12}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{3.13}$$

第 4 章

伝熱学

熱力学は熱平衡状態，つまり熱の移動が終了して安定した状態を扱う．対して，熱平衡常態に移る前の熱の移動を扱うのが**伝熱学**である．伝熱学は機械工学の重要な基礎学問となっている．

温度差があると熱（すなわちエネルギー）は移動する．しかし温度差が同じならいつでも同じだけの熱量が伝わるわけではなく，伝わる熱量は状況によって様々である．これは熱の流れに対する抵抗，すなわち**熱抵抗**が状況によって変わるからである．伝熱学とは，いろいろな場合の熱抵抗を知る学問である．熱抵抗の値が分かれば，熱利用装置の設計，運転，性能向上が計れる．

4.1 伝熱の基礎量

4.1.1 伝熱量

熱エネルギーの流量（単位時間あたりに伝わる熱量）を**伝熱量**という．伝熱量と温度差，熱抵抗には

$$\text{伝熱量 [W]} = \frac{\text{温度差 [K]}}{\text{熱抵抗 [K/W]}} \tag{4.1}$$

の関係がある．これはおなじみのオームの法則 $I = V/R$ と同じ形である．一般に物理現象としてあるものが流れるときには 流量 = (ポテンシャル差)/(抵抗) の関係になる．

4.1.2 伝熱の 3 形態

伝熱にはつぎの 3 つの形態がある．

1. **伝導**（conduction）
   物体内の粒子の接触による運動量の交換によって熱が伝えられる現象が熱伝導である．
2. **対流**（convection）
   流体粒子の運動によって固体表面と流体との間で熱が伝えられる現象が対流伝熱である．
3. **放射**（radiation）
   すべての物体は温度に応じて電磁波によるエネルギーを放射または吸収している．そのエネルギーによる熱交換現象が熱放射，または熱輻射である．

これらの伝熱現象が単独に生じる場合はまれで，実際には 2 つあるいは 3 つの現象が同時に生じている．

4.2 フーリエの法則

実験事実から，熱移動量 q は温度勾配と物体の断面積 A に比例することが分かっている．これを式で書くと

$$\frac{q}{A} \propto \frac{dT}{dx} \tag{4.2}$$

である．ここで比例定数を k とおくとつぎのようになる．

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx}, \tag{4.3}$$

単位を含めて書くと

$$\frac{q\ [\mathrm{W}]}{A\ [\mathrm{m}^2]} = -k\frac{dT\ [\mathrm{K}]}{dx\ [\mathrm{m}]}$$

である．この関係式を**フーリエの法則**（Fourier's Law）という．この法則は物質の形状，状態（固体，液体，気体）に関わらず成り立つ．比例定数 k $[\mathrm{W}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})]$ は**熱伝導率**（thermal conductivity）と呼ばれる．これは物質の種類とその状態（温度と圧力）によって決まる物性値である．熱伝導率が大きいほど熱が伝わりやすい．

フーリエの法則の右辺に負号が付いているのは，温度勾配と熱移動量に矛盾がないようにするためである．たとえば $+x$ の向きに温度が高くなっていれば，熱は $-x$ 向きに流れる（熱は温度が高い方から低い方へ流れる）．したがって熱移動量 q の符号は負でなければならない．

4.3 1 次元熱伝導方程式

熱伝導の一般化を考える．断面積 A，厚さ dx の要素の左面から q_x の熱量が流入し，右面から q_{x+dx} の熱量が流出するとする．このとき考えられる量は

- 左面から流入する熱量： q_x
- 要素内で発生した熱量： q_{gen}
- 右面から流出する熱量： q_{x+dx}
- 要素内のエネルギー変化： $\frac{\partial E}{\partial t}$

であるから，この要素内でのエネルギー収支は

$$q_x + q_{\mathrm{gen}} = q_{x+dx} + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{4.4}$$

と表される．単位時間あたりの発熱量を $dq/dt = \dot{q}$，要素の比熱を c，要素の密度を ρ とすると

$$\begin{aligned} q_x &= -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_x \\ q_{\mathrm{gen}} &= \dot{q}Adx \\ q_{x+dx} &= -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho cATdx) \end{aligned}$$

であるから，エネルギー収支はつぎのようになる．

$$-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_x + \dot{q}Adx = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho cATdx) \tag{4.5}$$

ここで，テイラー展開 $f(x+dx) = f(x) + \dfrac{f'(x)}{1!}dx$ より

$$-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} = -kA\frac{dT}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)dx \tag{4.6}$$

これを式 (4.5) に代入すると

$$-kA\frac{dT}{dx} + \dot{q}Adx = \left\{-kA\frac{dT}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)dx\right\} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho cATdx) \tag{4.7}$$

整理して

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + \dot{q} \tag{4.8}$$

が得られる．これを **1 次元熱伝導方程式**（one dimential equation of heat conduction）という．この方程式によって様々な初期条件，境界条件下で，要素内の温度分布と温度変化を予測することができる．

第 5 章

連続体力学

流体や弾性体といった連続体の力学体系は 20 世紀以前におおよそととのえられた．僕たちがふだん目にするものは，固体だろうが気体だろうがすべて拡がりをもつ．それらの運動を支配するのはニュートン力学に違いないが，拡がりをもったものを理解するには質点系ではなく連続体の力学が必要となる．

5.1 オイラーの方程式

粘性のない流体を完全流体あるいは理想流体（ideal fluid）とよぶ．完全流体に対する運動方程式は

$$\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right\}=-\nabla P+\rho\boldsymbol{f}$$

で，これはオイラーの方程式とよばれる．

5.2 ナビエ・ストークスの方程式

連続体の力学において，ニュートンの運動方程式に相当するものがナビエ・ストークスの方程式である．圧力 p，密度 ρ，粘性率 μ，単位質量あたりの外力 $\boldsymbol{K}$ として

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{K}-\mathrm{grad}\,p+\mu\left\{\frac{1}{3}\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})+\nabla^2\boldsymbol{v}\right\}$$

と表される．ナビエ・ストークスの方程式は，流体にどのような力が加わるとどのような動きが生まれるかを表す．

5.3 電磁流体方程式

質量密度

$$\rho_m=n_im_i+n_em_e$$

電荷密度

$$\rho=q_in_i+q_en_e$$

平均速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{n_im_i\boldsymbol{v}_i+n_em_e\boldsymbol{v}_e}{\rho_m}$$

電流密度

$$\boldsymbol{j}=q_in_i\boldsymbol{v}_i+q_en_e\boldsymbol{v}_e$$

5.4 プラズマの基本パラメータ

ラーモア (Larmor) 半径磁場中を運動する荷電粒子が，ローレンツ力を受けて円運動する際の半径

$$r = \frac{mv}{eB}$$

電子プラズマ周波数

$$\omega_{\mathrm{pe}} = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} \quad , \qquad n : \text{電子密度}$$

電子サイクロトロン周波数

$$\omega_{\mathrm{ce}} = \frac{e\boldsymbol{B}}{m}$$

デバイ長

$$\lambda_{rmD} = \left(\frac{\varepsilon_0 k T_{\mathrm{e}}}{ne^2}\right)^{1/2} \quad , \qquad T_{\mathrm{e}} : \text{電子温度}$$

$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフト

$$v_{\mathrm{E}} = \frac{E}{B}$$

第 6 章

振動と波動

普段あまり意識することはないが，振動や波動はとても身近な現象である．全ての波は正弦波・余弦波の重ね合わせで表すことができる．

6.1　波の式

進行波，後退波はそれぞれ

$$y(x,t) = \sin(kx - \omega t) \qquad \text{進行波} \tag{6.1}$$

$$y(x,t) = \sin(kx + \omega t) \qquad \text{後退波} \tag{6.2}$$

と表せる．k は波数，ω は角振動数.

6.2　単振り子

振幅が小さいと仮定して，水平方向の単振動と近似することが多い．

6.3　単振動 (調和振動)

一端を固定したバネ定数 k のバネに，質量 m の質点をとりつけ，なめらかな水平面上で振動できるようにしておく．一次元で考えると，振動質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

となる．この形の運動方程式になるような運動を単振動，または調和振動という．そしてこのような運動を行う系を調和振動子という．

第 7 章

量子力学

量子力学は 20 世紀はじめあたりからつくり上げられた，比較的新しい分野の物理である．ニュートン力学では説明できなかった現象，主に電子や原子という小さなスケールで現れる不可解な現象を量子力学はことごとく説明することができた．波であると考えられていた光は粒子としての性質も持ち，粒子であると考えられていた電子などは波としての性質も持ち，そして全ての現象は確率的にしか予測できないという．ちょっと不思議だが，量子力学の考えは現代テクノロジに欠かせない．

7.1 空洞輻射

真空の比熱のことを空洞輻射という．何も物質の入っていない箱を温めてみると，その中には光が発生する．光は真空中でも存在できるからだ．光に大きさはないので，一ヶ所にいくらでも存在できる．温められた真空の箱の中には，無限の光で満ちあふれている．

エネルギーの等分配則によると，箱の中の無数の光は温められた箱の壁からエネルギーを平等に受け取る．だから箱の中のにはさまざまな振動数の光が満ちあふれるはずである．しかし実際に観測してみると，振動数が偏っているのである．

7.1.1 ウィーンの式

ウィーン（Wein）は実験結果に合わせようとしてつぎの式を導いた．

$$E(\nu) = \frac{8\pi k_\mathrm{B}\beta}{c^3} e^{-\beta\nu/T}\nu^3 \qquad ：ウィーンの式$$

ここで β は実験値と合うように決める係数である．しかしこれは振動数の小さいところで実験結果と一致しない．

7.1.2 レイリー・ジーンズの式

これに対してレイリー・ジーンズ（Rayleigh–Jeans）はニュートン力学に基づいた厳密な理論から，エネルギー E と振動数 ν の式を導き出した．

$$E(\nu) = \frac{8\pi k_\mathrm{B}T}{c^3}\nu^2 \qquad ：レイリー・ジーンズの式$$

これは振動数が小さいところでは実験結果とよく一致するが，振動数が大きくなると全然合わない．

7.1.3　プランクの式

そしてプランク（Planck）はウィーンの式を一ヶ所だけ変え，レイリー・ジーンズの式とプランクの式のいい部分だけとるようにした．それがつぎの式である．

$$E(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_{\mathrm{B}}T} - 1} \qquad \text{：プランクの式}$$

この式は実験結果とぴったりと一致した．式 (7.1.3) にある h はプランク定数と呼ばれ

$$h = 6.62 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \qquad \text{：プランク定数}$$

という小さな値である．プランクが空洞輻射の実験結果に合う式をつくったとき，プランク定数はつじつま合わせのために導入された定数にすぎなかった．しかしこのつじつま合わせの定数から，量子力学が産声をあげることになる．

7.2　光量子

光（電磁波）は粒子としても振る舞う．振動数が ν の光は

$$\text{エネルギー} \qquad \varepsilon = h\nu \tag{7.1}$$

$$\text{運動量の大きさ} \qquad |\boldsymbol{p}| = \frac{h\nu}{c} \tag{7.2}$$

をもつ．これを光量子という．ここで $h = 6.626176 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ はプランク定数， c は光速度である．

$$c = \nu\lambda$$

という関係を用いれば，λ で表して

$$\varepsilon = h\nu, \qquad |\boldsymbol{p}| = \frac{h}{\lambda}$$

とも書ける．振動数 ν の代わりに角振動数 $\omega = 2\pi\nu$ ，h の代わりに $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ を用いて $\varepsilon = \hbar\omega$ とすることも多い．方向が波の進行方向と一致し大きさが $\dfrac{2\pi}{\lambda}$ の波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ というものを考えると

$$\varepsilon = \hbar\omega, \qquad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$$

と書ける．

7.3　粒子であることと波であること

粒子は一ヶ所に集中した状態であり，波は空間的に広がった状態である．粒子であり波であるという二重性は，数学的にはフーリエ変換として表現できる．フーリエ変換では，空間の x 方向に変化している関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\ dk$$

という積分で書ける．e^{ikx} は x とともに振動する関数であるから，これが波を表している．$F(k)$ は適当な重みで，k は振動数だと考えればいい．つまり上式は，異なる振動数の波を積分することで，粒子の位置を表現する $f(x)$ が得られることを示している．

7.4　物理量と演算子

古典力学におけるハミルトニアン

$$H(p,q) = E$$

において

$$p \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$$

という演算子 (operator) と置いたもの

$$\left\{H\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right) - E\right\}\psi = 0$$

でシュレディンガー方程式が得られる．これをハミルトニアン演算子という．また，E については

$$E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

という演算子に置きかえる．ゆえにシュレディンガー方程式は

$$\left\{H\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\psi = 0$$

となる．

ポテンシャル $V(x, y, z)$ のなかを運動する質量 m の粒子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x, y, z)$$

であるから，これを演算子

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$$

に置きかえると，ハミルトニアン演算子は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) \tag{7.3}$$

となる．したがって，この場合のシュレディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\psi = 0 \tag{7.4}$$

である．

量子力学では運動量 p と運動量演算子 $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ をあまり区別しない．演算子であることを明確にするためには上に $\wedge$ を付けて $\hat{p}$ と書く．演算子で与えられる量（運動量，ハミルトニアン等）を q-数（きゅーすう），固有値など演算子でない量を c-数（しーすう）と呼ぶ．

7.5　平均値

粒子の位置の平均値は

$$\langle q\rangle = \int \psi^* q\,\psi\ dq$$

で与えられる．また，運動量の平均値（期待値）は

$$\langle p\rangle = \int \psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\,\psi\ dq$$

で与えられる．シュレディンガー方程式から，エネルギーの平均値（期待値）

$$\langle H\rangle = \int \psi^* H\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\,\psi\ dq = E$$

が得られる．これらを一般化すると，座標 q とそれに正準共役な運動量 p で与えられる物理量 $Q(p, q)$ に対応する量子力学での期待値は

$$\langle Q\rangle = \int \psi^* Q\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\,\psi(q)\ dq$$

で与えられる．

7.6　クロネッカーのデルタ

つぎの交換子の関係式

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

をクロネッカーのデルタといい，量子力学において非常に重要な式である．

7.7　エルミート演算子

古典物理量は常に実数であるから，その量子力学での対応量，つまりその物理量の期待値も実数にならなくては困る．そのためには，物理量 Q はエルミート演算子（hermitian operator) でなければならない．エルミート演算子とは，二つの量子状態 ϕ，ψ について

$$\left\{ \int \phi^* Q \, \psi \; dq \right\}^* = \int \psi^* Q \, \phi \; dq \tag{7.5}$$

$$\Updownarrow \tag{7.6}$$

$$\langle \phi \,|\, Q \,|\, \psi \rangle^* = \langle \psi \,|\, Q \,|\, \phi \rangle \tag{7.7}$$

を満たす演算子である．

ある演算子 Q に対して

$$\left\{ \int \psi^* Q \, \phi \; dq \right\}^* = \int \phi^* Q' \, \psi \; dq$$

を満たす演算子 Q' を Q のエルミート共役（hermitian conjugate）演算子と呼び，

$$Q^\dagger = Q'$$

と書く． Q がエルミート演算子であるならば,

$$Q = Q^\dagger$$

である．すなわち

$$\langle \phi \,|\, Q \,|\, \psi \rangle^* = \langle \psi \,|\, Q^\dagger \,|\, \phi \rangle$$

である．ψ と ϕ が等しいとき

$$\langle \psi \,|\, Q \,|\, \psi \rangle = \text{実数}$$

となる．

7.8　無限の井戸型ポテンシャル

1 次元無限井戸型ポテンシャルのシュレディンガー方程式を解き，粒子がどのような分布をとるのかを見てみよう．

7.8.1　ポテンシャルの形

つぎのポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (-L < x < L) \\ \infty & (x \geq -L, \; L \leq x) \end{cases}$$

を無限の井戸型ポテンシャル，または箱型ポテンシャルという．

7.8.2　シュレディンガー方程式の書きだし

一次元のシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

となる．これは偏微分方程式なので変数分離して解く．

7.8.3　変数分離

変数分離するため

$$\psi(x,t)=f(x)g(t)$$

を式 (7.8.2) の $\psi(x,t)$ に代入する．

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)f(x)g(t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(x)g(t)$$

左辺の括弧を展開.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)g(t)+V(x)f(x)g(t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(x)g(t)$$

左辺第一項は x の偏微分なので $f(x)g(t)$ の $g(t)$ は偏微分と関係ないから前に出す.

$$-g(t)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)+V(x)f(x)g(t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(x)g(t)$$

同様に右辺の $f(x)$ も前に出す.

$$-g(t)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)+V(x)f(x)g(t)=f(x)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}g(t)$$

変数分離形にするため，両辺を $f(x)g(t)$ で割る.

$$-\frac{1}{f(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)+V(x)=\frac{1}{g(x)}\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}g(t)$$

ここで，両辺は定数 E とおける．

$$-\frac{1}{f(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)+V(x)=\frac{1}{g(x)}\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}g(t)=E$$

したがって

$$-\frac{1}{f(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)+V(x)=E \tag{7.8}$$

$$\frac{1}{g(x)}\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}g(t)=E \tag{7.9}$$

整理すると

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)f(x)=Ef(x) \tag{7.10}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}g(t)=Eg(t) \tag{7.11}$$

それぞれ一変数しか持たないので，常微分方程式になった．特に式 (7.10) は時間 t を含まないため，定常状態のシュレディンガー方程式と呼ばれる．

7.8.4 定常状態のシュレディンガー方程式を解く

では常微分方程式 (7.10) を解いてゆこう．ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (-L \leq x \leq L) \\ \infty & (x > -L,\ L < x) \end{cases}$$

で定義されていた．$V(x) = 0$ の場合は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 \right) f(x) = Ef(x)$$

つまり

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = Ef(x)$$

となることがすぐにわかる．だが $V(x) = \infty$ の場合は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \infty \right) f(x) = Ef(x)$$

となってよくわからない．この場合，つまり $x > -L,\ L < x$ の場合は粒子が存在できない，すなわち

$$f(x) = 0$$

である考える．したがって

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = Ef(x) \qquad (-L \leq x \leq L) \tag{7.12}$$

$$f(x) = 0 \qquad (x > -L,\ L < x) \tag{7.13}$$

の 2 つの場合に分けられる．式 (7.12) より

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} f(x)$$

ここで $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ とおくと，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = -k^2 f(x)$$

となる．式 (7.8.4) に解として

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

を代入すると

$$(\alpha^2 + k^2) = 0 \tag{7.14}$$

$$\therefore \qquad \alpha = \pm ik \tag{7.15}$$

よって特解は

$$e^{ikx},\ e^{-ikx} \tag{7.16}$$

一般解は三角関数の線型結合で書けて

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)\,, \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{7.17}$$

となる．

7.8.5 境界条件から波動関数を求める

式 (7.17) の A, B は境界条件，規格化条件から決まる定数である．まずは境界条件から考えよう．ポテンシャル $V(x)$ は式 (7.8.1) で定められていた．$V(x)$ は x が $-L, L$ の場所から無限大になる．ここで重要なのは $x=-L$ および $x=L$ の場所でポテンシャルが無限，つまり粒子が存在できないということ．$x>-L,\ L<x$ の場合に $f(x)=0$ となるのはポテンシャル $V(x)$ の値で場合分けしたときすでに考えた．しかしシュレディンガー方程式の解である波動関数は連続でなければならないから，ちょうど境界にあたる $x=-L,\ x=L$ の部分では式 (7.12) もこの条件を満たさなければならない．

$x=-L,\ x=L$ で粒子は存在できないのだから，この範囲の x で式 (7.17) の $f(x)$ はゼロになる．したがって

$$f(-L) = A\cos(-kL) + B\sin(-kL) = 0 \tag{7.18}$$
$$f(L) = A\cos(kL) + B\sin(kL) = 0 \tag{7.19}$$

$\cos(-x)=\cos(x),\ \sin(-x)=-\sin(x)$ という関係を使うと，

$$A\cos(kL) - B\sin(kL) = 0 \tag{7.20}$$
$$A\cos(kL) + B\sin(kL) = 0 \tag{7.21}$$

この式から A, B の値を決めることができる．まず $A=B=0$ という場合が考えられるが，この場合は無意味なので考えない．

- $A=0$ の場合
  式 (7.20), (7.21) の辺々を引くと $2B\sin(kL)=0$ ，A と B は両方ともゼロにはならないので，
  $$\sin(kL) = 0$$
  したがって
  $$kL = n\frac{\pi}{2}\,, \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots)$$
- $B=0$ の場合
  式 (7.20), (7.21) の辺々を足すと $2A\cos(kL)=0$ ，A と B は両方ともゼロにはならないので，
  $$\cos(kL) = 0$$
  したがって
  $$kL = n\frac{\pi}{2}\,, \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

両方の場合をまとめると

$$k = n\frac{\pi}{2L}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．k はこのように許される値が決まってしまった．$\pi/2L$ の n 倍になっている．飛び飛びなわけだ．この飛び飛びの状態を量子化されているといい，n を量子数と呼ぶ．

7.8.6 粒子が存在できる部分の波動関数

それではポテンシャルが無限大でない部分，$-L<x<L$ での波動関数 $f(x)$ を考えよう．上で調べたように，n が偶数（$A=0$ の場合）ならサイン関数，n が奇数（$B=0$ の場合）ならコサイン関数になる．すなわち

$$f_n(x) = A_n\cos\left(n\frac{\pi}{2L}x\right)\,, \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{7.22}$$
$$f_n(x) = A_n\sin\left(n\frac{\pi}{2L}x\right)\,, \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots) \tag{7.23}$$

n が奇数なら波動関数は偶関数，n が偶数なら波動関数は奇関数である．

7.8.7 エネルギー固有値

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ であったから，式 (7.8.5) に代入すると

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = n\frac{\pi}{2L}$$

したがって n に対応するエネルギー固有値 E_n は

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

エネルギーの最低値はゼロではなく，$n = 1$ で最も低い $h^2/8ml^2$ という値をとる．井戸型ポテンシャル中の粒子はエネルギーがゼロになることを許されないのだ（したがって絶対零度になれない）．このエネルギーを零点エネルギーと呼ぶ．

7.9 調和振動子ポテンシャル

力が $F(x) = -m\omega^2 x$ で与えられていると，ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = -\int F(x)dx = \int m\omega^2 x dx = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + C$$

$V(0) = 0$ とすると，

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

運動量を p とするとハミルトニアン H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{7.24}$$

シュレディーンガー方程式

$$a \tag{7.25}$$

付録 A

物理定数

A.1　普遍定数

真空中の光速 $c = 2.99792458 \times 10^8$ m·s^{-1}

真空中の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $1.2566370614 \times 10^{-6}$ N·A^{-2}

真空中の誘電率 $\varepsilon_0 = 1/(4\pi c^2) \times 10^{-7} = 8.854187817 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}

万有引力定数 $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

プランク定数 $h = 6.6260876 \times 10^{-34}$ J·s

$\hbar = h/(2\pi) = 1.054571596 \times 10^{-34}$ J·s

素電荷 $e = 1.602176462 \times 10^{-19}$ C

磁束量子 $h/(2e) = 2.067833636 \times 10^{-15}$ Wb

A.2　物理化学定数

原子質量単位 $\mathrm{u} = 1.66053873 \times 10^{-27}$ kg

アボガドロ定数 $N_\mathrm{A} = 6.02214199 \times 10^{23}$ mol^{-1}

ボルツマン定数 $k = 1.3806503 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}

ファラデー定数 $F = N_\mathrm{A}e = 9.64853415 \times 10^4$ C·mol^{-1}

1 モルの気体定数 $R = N_\mathrm{A}k = 8.314472$ J·mol^{-1}·K^{-1}

理想気体 1 モルの体積（0°C, 1 atm）$V_\mathrm{m} = 2.2413996 \times 10^{-2}$ m^3·mol^{-1}

ステファン・ボルツマン定数 $\sigma = \pi^2 k^4/(60\hbar^3 c^3) = 5.670400 \times 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}

付録 B

座標系

B.1 デカルト座標

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{B.1}$$

$$dv = dxdydz \tag{B.2}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{B.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{B.5}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{B.6}$$

B.2 円筒座標

$$\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_z) \tag{B.7}$$

$$dv = rdrd\theta dz \tag{B.8}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{B.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \right) \tag{B.11}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{B.12}$$

B.3　球座標

$$\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) \tag{B.13}$$

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{B.14}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \tag{B.15}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{B.16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right\}, \frac{1}{r}\left\{ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) \right\}, \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \right) \tag{B.17}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{B.18}$$

参考文献

[1] 橋元淳一郎 著,『橋元流解法の大原則』(学研，1992 年)
[2] 橋元淳一郎 著,『橋元流解法の大原則・2』(学研，1994 年)
[3] 有馬朗人 著,『基礎物理学 上』(学術図書出版社，1995 年)
[4] 有馬朗人 著,『基礎物理学 下』(学術図書出版社，1995 年)
[5] 橋元淳一郎 著,『単位が取れる電磁気学ノート』(講談社，2003 年)
[6] 江幡武・内田和喜男・坪田博明 著『基礎物理コース 熱学』(学術図書出版社，1996 年)
[7] 吉田駿 著,『伝熱学の基礎』(理工学社，2000 年)
[8] 原島鮮 著,『初等量子力学(改訂版)』(裳華房，2001 年)
[9] 国立天文台 編,『理科年表 平成 16 年』(丸善，2003 年)

索引