尖端放電（改）

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-11-21

どうも，間違いを修正してみました．これなら，つじつまが合いそうです．

電荷が作る電場は，尖ったものの先端において，大きくなり電子を放出しやすくなります．どんな電界が生じるのかを書くことにします．

簡単のため，下図の様な二次元極座標 (r, θ) で考えます．クサビ型の金属で奥行きを z 方向としてもらって構いません．金属表面は等電位面であります．しかし，表面電荷はそんざいします．

真空におけるラプラス方程式は，

$$\triangle V(r,\theta) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) V(r,\theta) = 0 \tag{1}$$

ここで，変数分離法を用い，r 方向と θ 方向の常微分方程式に還元してやります．つまり，$V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ と仮定して，式 (1) に代入するのです．すると，

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r}) \times \Theta + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \times R = 0 \tag{2}$$

両辺 $R\Theta$ で割って，移項すれば，

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})/R = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}/\Theta \tag{3}$$

これは，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数なので，r の式ではなく，θ の式でもなく，これは実定数 $(k > 0)$ の二乗 k^2[*1] に等しいことが分かります．

よって，この式は，

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = -k^2 \Theta \tag{4}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r}) = r\frac{\partial}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} = k^2 R \tag{5}$$

---

*1 k^2 が負だと r 方向の方程式が，虚数の解をもつことになるので，物理的に意味のない方程式になります．

式 (4) は，単振動でお馴染みの式ですね．これをとくと，

$$\Theta = A\sin(k\theta + \phi) \tag{6}$$

境界条件 $\theta = 0, 2\pi - \alpha$ の時，$k \times 0 + \phi = 0$, $k(2\pi - \alpha) + \phi = \pi$ とします．つまり，$\phi = 0$, $k = \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}$ となります．

これで，θ 方向は解けました．次は動径方向です．$R = r^d$ と仮定すると，式 (5) より，

$$\begin{aligned} r \times dr^{d-1} + r^2 \times d(d-1)r^{d-2} &= d^2 r^d \\ &= k^2 r^d \end{aligned} \tag{7}$$

よって，$d^2 = k^2$ が得られます．正負の符号の内，信じられないかもしれませんが，無限遠で発散する $d = k > 0$ が求める解であります．これは，原点近傍のみで有効であります．この正の解を取る理由としては，例えば，$\alpha = \pi$ の時を考えてください．xy 平面の下半分が金属という状態です．この時，$k = \dfrac{\pi}{2\pi - \pi} = 1$ となり，本来，平面状の一様な面電荷が作る電場は，面に垂直で距離を変えても一定の大きさとなりますよね．つまり，例えばポテンシャルとしては，$V(x, y, z) = Ay$ のような形をしています．よって，ここで $V(r, \theta) = Ar\sin\theta = Ay$ となります．これは，$d = k = 1 > 0$ とすれば，見事に，

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= R(r)\Theta(\theta) \\ &= Ar\sin k\theta \\ &= Ar\sin\theta \\ &= Ay \end{aligned}$$

となる訳です．ここで，$\alpha = \pi$ だった，クサビの尖り具合をしめす α は，連続的変化で $\alpha \to 0$ となれますから，結局，$\alpha \to 0$ とした時，

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= Ar^{\pi/2\pi - \alpha}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi - \alpha} \\ &\to Ar^{1/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となり，原点近傍において $\theta = \pi$ の方向に，$r^{-1/2}$ の大きさの，電場の発散が起きることが分かります．これが，尖ったものが静電気を放電しやすい原理です．

それでは，今日はここまで．