

四次元の微分形式

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

いままでずっと三次元ユークリッド空間上の微分形式ばかり考えていましたが、四次元の微分形式も考えてみます。次の記事 [ミンコフスキー空間の微分形式](#) では、ミンコフスキー空間という、計量が負になるような軸のある四次元空間を考えますが、この記事ではとりあえず、普通の計量を持った四次元ユークリッド空間を考えておきます。復習を兼ねた、ミンコフスキー空間の準備編とも言うべき記事ですので気楽に読んで下さい。

四次元の微分形式

すでに、一般の次元の微分形式の定義も [微分形式](#) で紹介していますので、このセクションの内容は復習になります。いま、実数上の四次元ユークリッド空間 R^4 に座標系 $xyzw$ を取れるとすると、 R^4 上の外積空間には $\wedge^0 R^4$, $\wedge^1 R^4$, $\wedge^2 R^4$, $\wedge^3 R^4$, $\wedge^4 R^4$ の五種類があり、各空間上の微分形式の基底は次のようになります。

$$\wedge^0 R^4: 1$$

$$\wedge^1 R^4: dx, dy, dz, dw$$

$$\wedge^2 R^4: dy \wedge dz, dz \wedge dw, dw \wedge dx, dx \wedge dy, dw \wedge dy, dz \wedge dx$$

$$\wedge^3 R^4: dx \wedge dy \wedge dz, dy \wedge dz \wedge dw, dz \wedge dw \wedge dx$$

$$\wedge^4 R^4: dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw$$

各外積空間の次元は、それぞれ、 ${}_4C_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) に対応して 1, 3, 6, 3, 1 となっている点を確認して下さい。もう一つ注意するのは空間の向きです。ボリュウムフォームに $xyzw$ の順列に向きをつけて、 $(dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw) = 1$ とするのは良いでしょう。 R^3 上の微分形式と異なるのは、 $\wedge^2 R^4 = \wedge^{4-2} R^2$ のため、 $\wedge^2 R^4$ の基底のホッジ作用素を取ったものが $\wedge^2 R^4$ の基底自身になるという点です（自己双対）。この点に注意して、 $\wedge^2 R^4$ の基底のうち、 $xyzw$ の偶順列 $yzxw$, $yxwz$, $ywzx$, $xzwy$, $xwyz$, $zwx y$, $zxyw$, $zywx$, $wxyz$, $wy z x$, $wzxy$ から、前半の二つと後半の二つをそれぞれ並べた形のを正と決めます。（自分でも計算して確認してみてくださいね。）

何か引っ掛かった点がある人は、次の記事に進むまえに曖昧な部分を復習しておいて下さい。