

## 周期時系列の統計解析

(16) コサイン関数の積による2次元平面波の主成分分析

nino

2020年8月8日

前報では、単一のコサイン関数を用いた2次元コサイン波の主成分分析について検討した。ここでは、2つのコサイン関数の積による2次元平面波の主成分分析について考察するとともに、これまでの時系列および2次元コサイン波の検討結果と比較検討した。

### 2つのコサイン関数の積による2次元平面波

2つのコサイン関数の積とは、JPEG画像圧縮などに使用されている2次元離散コサイン変換の正規直交基底（参考文献1, 2）を変形した次式である。

$$u_{x,y} = \cos[2\pi(x+\alpha_1)/N_1] \times \cos[2\pi(y+\alpha_2)/N_2] \quad (1)$$

ここで、 $x$ と $y$ はそれぞれ座標を示し、 $x, y=0,1,\dots,m-1$ である。 $N_1$ と $\alpha_1$ は $x$ 軸方向の周期と位相、 $N_2$ と $\alpha_2$ は $y$ 軸方向の周期と位相である。

式(1)より $m$ 次正方行列が得られ、 $m=24$ の時は次の24次正方行列 $U_{N_2,\alpha_2}^{N_1,\alpha_1}$ で表される。式中には、 $x$ 軸方向と $y$ 軸方向を矢印で示した。

$$U_{N_2,\alpha_2}^{N_1,\alpha_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow x \\ u_{0,0} & u_{1,0} & \cdots & u_{22,0} & u_{23,0} \\ u_{0,1} & u_{1,1} & \cdots & u_{22,1} & u_{23,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{0,22} & u_{1,22} & \cdots & u_{22,22} & u_{23,22} \\ u_{0,23} & u_{1,23} & \cdots & u_{22,23} & u_{23,23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow y \\ \end{matrix} & \end{matrix} \quad (2)$$

式(2)の正方行列により作成される2次元波を「2次元平面波」といい、前報の単一のコサイン関数からなる「2次元コサイン波」と区別した（参考文献3）。

### 2次元平面波と時系列との関係

前報と同様に、2次元平面波を時系列を重ね合わせた行列とみなして検討する。

式(1)の右辺を第一項と第二項に分け、第一項は時間 $x$ の変数 $u_x$ とし、第二項は $y$ 値に対応した定数（振幅 $b_y$ ）と考える。すなわち、 $y=0,1,\dots,23$ の各 $b_y$ 値が定まる

$$\cos[2\pi(x+\alpha_1)/N_1] = u_x \quad (3)$$

$$\cos[2\pi(y+\alpha_2)/N_2] = b_y \quad (4)$$

さらに、式(3)を用いて次の行ベクトル $u_x$ を定義し、これを時系列 $u_x$ （ $x$ 単位：hr）とした。

$$u_x = (u_0, u_1, \dots, u_x, \dots, u_{23}) \quad (5)$$

この場合、 $N=24$  hrであるから、1 hrあたり $360^\circ/24=15^\circ$ に相当する。

式(2)の正方行列 $U_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1}$ を時系列 $\mathbf{u}_x$ と振幅 $b_y$ を用いて書き換えると,

$$U_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1} = \begin{pmatrix} b_0 \mathbf{u}_x \\ b_1 \mathbf{u}_x \\ \vdots \\ b_y \mathbf{u}_x \\ \vdots \\ b_{22} \mathbf{u}_x \\ b_{23} \mathbf{u}_x \end{pmatrix} \quad (6)$$

の列ベクトルが得られる.

例として, 図1と図2に $U_{24,0}^{24,0}$ と $U_{24,0}^{24,4}$ の各時系列 $b_y \mathbf{u}_x$ を示した. ただし, 振幅が $b_0 \sim b_{12}$ までの時系列を示してある.  $b_{13}$ 以降は繰り返しになるからである.

図1 ( $U_{24,0}^{24,0}$ )

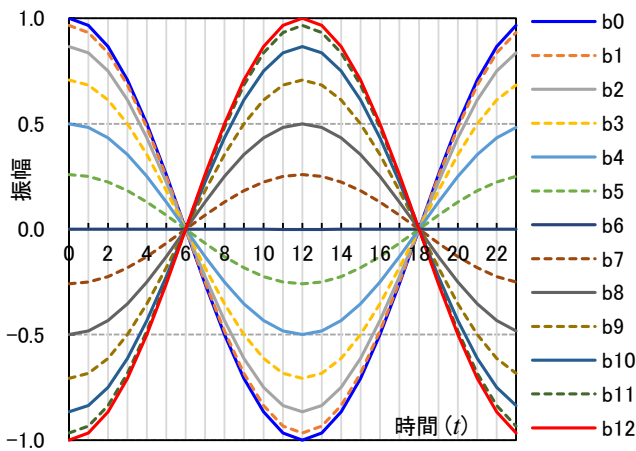


図2 ( $U_{24,0}^{24,4}$ )

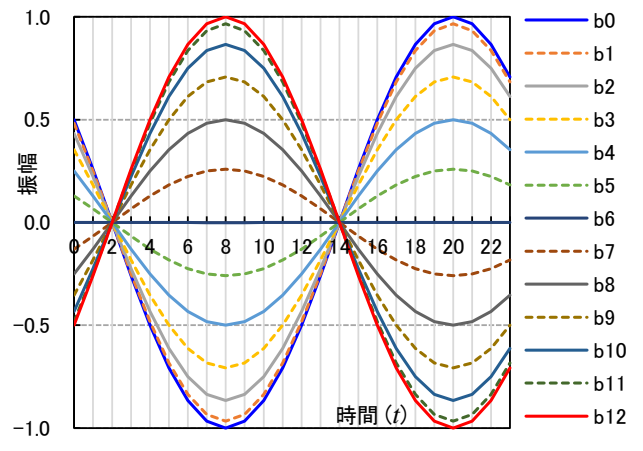


図1によると,  $U_{24,0}^{24,0}$ の各時系列は振幅が異なるだけで同じパターンを示した. 図2の $U_{24,0}^{24,4}$ も同様であるが, 位相は $U_{24,0}^{24,0}$ より4 hr (位相差:  $60^\circ$ ) 進んでいる. このように, $U_{24,0}^{24,0}$ と $U_{24,0}^{24,4}$ はそれぞれ振幅のみが異なる時系列の重ね合わせとなっている. なお, 前報で示した2次元コサインは, 各時系列の振幅が全て1 ( $b_0$ ) の場合に該当する.

## 2次元平面波

正方行列 $U_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1}$ から,  $u_{x,y}$ を座標 $(x,y)$ の画素値とした標高線が描画できる (参考文献3).

図3と図4に, 2次元平面波 $U_{24,0}^{24,0}$ の3-D等高線と等高線を示した.

図3 ( $U_{24,0}^{24,0}$ )

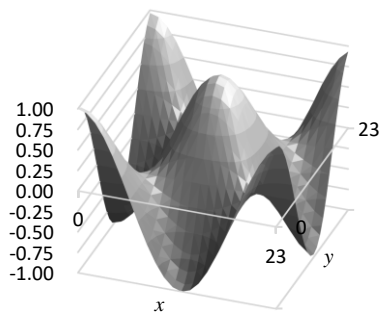


図4 ( $U_{24,0}^{24,0}$ )

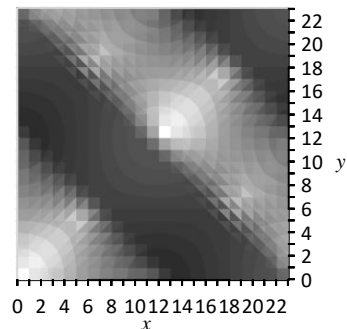


図3と図4より、 $U_{24,0}^{24,0}$ は最大高さ1を示す点(12,12)など周期24 hrの波がみられる。以降、等高線を用いる。

さらに、図5と図6に $U_{24,4}^{24,0}$ と $U_{12,0}^{12,0}$ の2次元平面波を示した。

図5 ( $U_{24,4}^{24,0}$ )

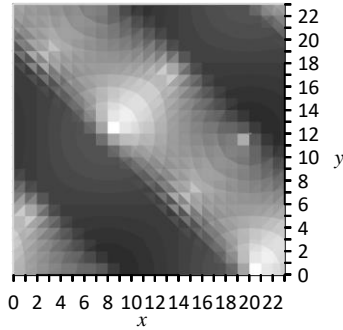
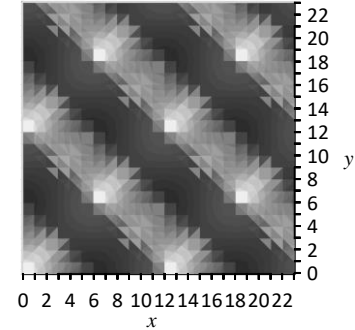


図6 ( $U_{12,0}^{12,0}$ )



最大高さ1を示す点は、 $U_{24,4}^{24,0}$ では点(8,12)にあり、 $U_{24,0}^{24,0}$ の点(12,12)よりx軸左方向に4 hr(60°)移動している。また、 $U_{12,0}^{12,0}$ は $U_{24,0}^{24,0}$ に比べてサイズが両軸とも1/2に縮小している。 $U_{24,0}^{24,0}$ と $U_{24,4}^{24,0}$ と $U_{12,0}^{12,0}$ の3つの2次元平面波(CaseA)の主成分分析について検討する。

### 正方行列の時系列形式

主成分分析を適用するために、行列形式である正方行列を1行に並べ直してベクトル形式に変換した(参考文献3)。

手順としては、式(2)において、まず1行目の行ベクトルの後に2行目の行ベクトルを結合し、次に2行目の行ベクトルの後に3行目の行ベクトルを結合する。以下同様に、最後の24行目の行ベクトルまで結合した行ベクトルを時系列形式 $S_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1}$ という。

$$\begin{aligned} S_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1} &= (u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{23,0}, u_{0,1}, u_{1,1}, \dots, u_{23,1}, u_{0,2}, u_{1,2}, \dots, u_{x,y}, \dots, u_{23,23}) \\ &= (b_0 \mathbf{u}_x, b_1 \mathbf{u}_x, \dots, b_y \mathbf{u}_x, \dots, b_{23} \mathbf{u}_x) \end{aligned} \quad (7)$$

時系列 $\mathbf{u}_x$ の場合と同様に、時系列形式 $S_{N2,\alpha2}^{N1,\alpha1}$ の横軸を時間 $t$ (hr)とする。 $u_{x,y} = u_t$ とおくと、 $t = x + 24 \times y$ である( $t = 0, 1, 2, \dots, 575$ )。

図7に $S_{24,0}^{24,0}$ と $S_{24,0}^{24,4}$ と $S_{12,0}^{12,0}$ の時系列を示した。

図7

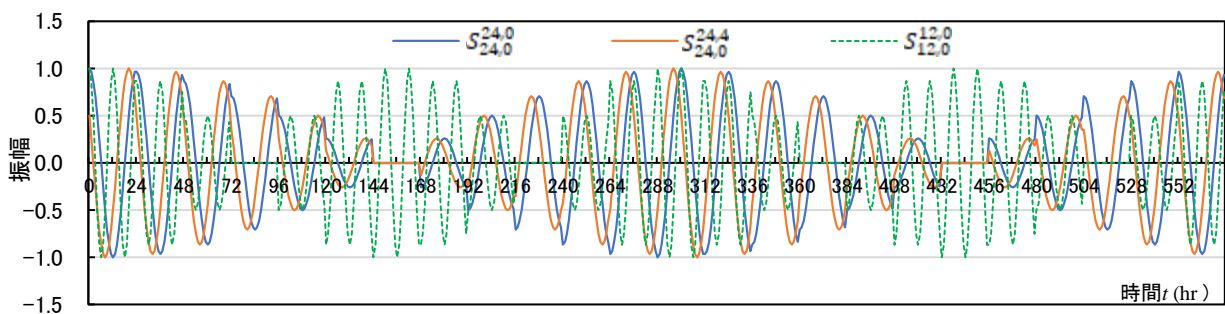


図 7 から, 各時系列形式はいずれも短周期と長周期の波の重ね合わせとなっている.  $S_{24,0}^{24,0}$  と  $S_{24,0}^{24,4}$  の短長周期はそれぞれ 24 hr と  $24 \times 24 = 756$  hr であり,  $S_{12,0}^{12,0}$  の短長周期はそれぞれ 12 hr と  $12 \times 12 = 144$  hr である. また, 振幅  $b_y$  の違いによる 24 hr 毎の不連続もみられた.

### 時系列形式の主成分分析結果

CaseA の時系列形式に主成分分析を適用した.

表 1 に  $S_{24,0}^{24,0}$  と  $S_{24,0}^{24,4}$  と  $S_{12,0}^{12,0}$  の相関係数を, 表 2 にそれらの主成分分析結果を示した. 各主成分をそれぞれ  $z_{1A}$ ,  $z_{2A}$ ,  $z_{3A}$  とした.

表 1

相関係数	$S_{24,0}^{24,0}$	$S_{24,0}^{24,4}$	$S_{12,0}^{12,0}$
$S_{24,0}^{24,0}$	1		
$S_{24,0}^{24,4}$	0.500	1	
$S_{12,0}^{12,0}$	0.000	0.000	1

表 2

主成分分析結果	$z_{1A}$	$z_{2A}$	$z_{3A}$	固有ベクトル	$z_{1A}$	$z_{2A}$	$z_{3A}$
固有値	1.500	1.000	0.500	$S_{24,0}^{24,0}$	0.707	0	-0.707
寄与率	0.500	0.333	0.167	$S_{24,0}^{24,4}$	0.707	0	0.707
累積寄与率	0.500	0.833	1.000	$S_{12,0}^{12,0}$	0	1	0

表 1 より,  $S_{24,0}^{24,0}$  と  $S_{24,0}^{24,4}$  の相関係数は 0.5 ( $= \cos 60^\circ$ ) であり, この両者と  $S_{12,0}^{12,0}$  の相関係数は 0.000 (直交) であった. 表 2 の固有ベクトルより,  $S_{24,0}^{24,0}$  と  $S_{24,0}^{24,4}$  は  $z_{1A}$  および  $z_{3A}$  に分配され, また,  $S_{12,0}^{12,0}$  は  $z_{2A}$  と一致した.

これらの結果は, 3 変数の周期と位相が同じである時系列および 2 次元コサイン波の場合と一致した (参考文献 3, 4).

次に, CaseA の主成分スコア  $z_{1A}$ ,  $z_{2A}$ ,  $z_{3A}$  の時系列を調べた (図 8).

図 8

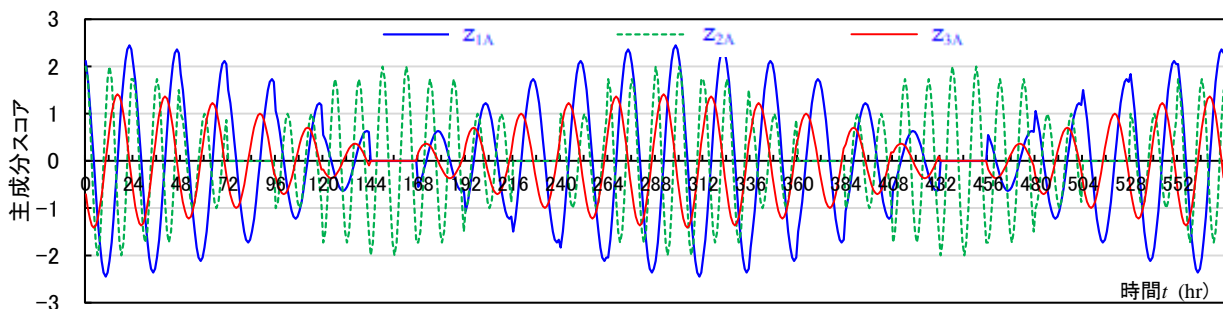


図 8 から, 各主成分は各時系列形式と類似したパターンを示すが, 位相は異なった.  $z_{1A}$  の位相は 2 hr ( $30^\circ$ ),  $z_{3A}$  の位相は 8 hr ( $120^\circ$ ) となり, 両主成分は 6 hr ( $90^\circ$ ) の位相差 (直交関係) を示した. また,  $z_{2A}$  の位相は  $S_{12,0}^{12,0}$  の位相と一致した.

## 主成分スコアの 2 次元平面波

主成分スコアの時系列（図 8）から 2 次元平面波を作成するためには、先述の正方行列から時系列形式に並べ直した操作の逆を行えば良い。

図 9，図 10，図 11 に主成分スコア  $z_{1A}$ ， $z_{2A}$ ， $z_{3A}$  の 2 次元平面波を示した。振幅は省略。

図 9 ( $z_{1A}$ )

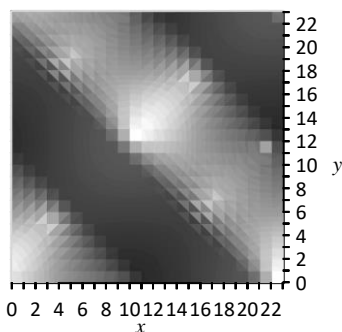


図 10 ( $z_{2A}$ )

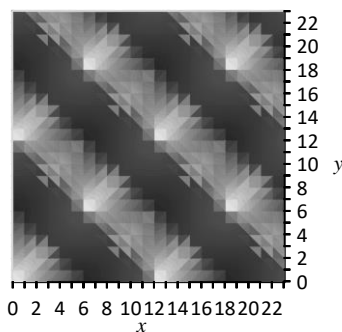
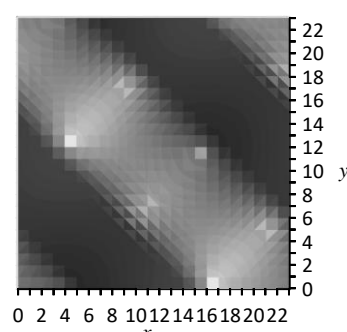


図 11 ( $z_{3A}$ )



$z_{1A}$  と  $z_{3A}$  の周期はいずれも 24 を示した。  $z_{1A}$  の中心付近にある最大高さを示す点は (10, 12) に、同じく  $z_{3A}$  の点は (4, 12) にあり、  $x$  座標は  $z_{1A}$  が  $z_{3A}$  より 6 hr ( $90^\circ$ ) 大きかった（直交していた）。一方、  $z_{1A}$  の  $x$  座標は最大高さが点 (12, 12) にある  $U_{24,0}^{24,0}$  よりも 2 hr ( $30^\circ$ ) 小さく、最大高さが点 (12, 8) にある  $U_{24,0}^{24,4}$  よりも 2 hr ( $30^\circ$ ) 大きかった。 2 hr ( $30^\circ$ ) は理論的に位相差 4 hr ( $60^\circ$ ) の 1/2 を示す（参考文献 5）。これらの結果は、時系列および 2 次元コサイン波の結果と同じ傾向を示した（参考文献 3, 4）。また、  $z_{2A}$  は  $U_{12,0}^{12,0}$  と同じパターンを示した。先述したように、固有ベクトル（表 2）から、  $z_{2A}$  は  $S_{12,0}^{12,0}$  と一致するためである。

## $x$ 軸方向と $y$ 軸方向の周期が異なる 2 次元平面波の主成分分析

これまでは、周期が  $x$  軸方向と  $y$  軸方向で同一である 2 次元平面波の主成分分析について検討した。では、周期が  $x$  軸方向と  $y$  軸方向で異なる 2 次元平面波ではどうなるのか？

例として、  $x$  軸方向と  $y$  軸方向の周期が 24 hr と 12 hr である  $U_{12,0}^{24,0}$  と  $U_{12,0}^{24,4}$  および同じく周期が 12 hr と 24 hr の  $U_{24,0}^{12,0}$  の 3 つの 2 次元平面波（CaseB）について検討した。

図 12，図 13，図 14 に  $U_{12,0}^{24,0}$ ，  $U_{12,0}^{24,4}$ ，  $U_{24,0}^{12,0}$  の 2 次元平面波を示した。

図 12 ( $U_{12,0}^{24,0}$ )

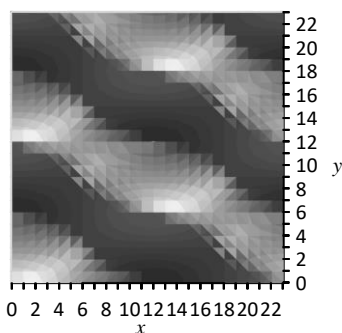


図 13 ( $U_{12,0}^{24,4}$ )

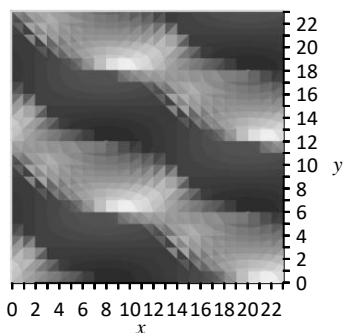
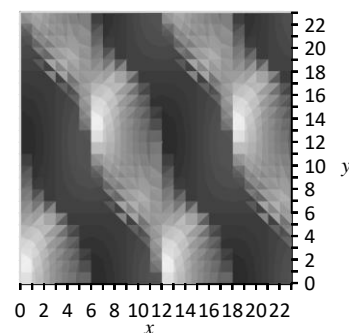


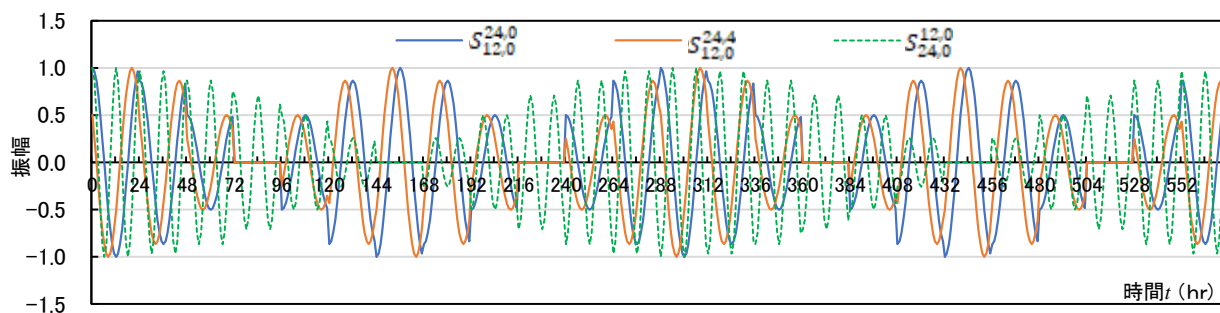
図 14 ( $U_{24,0}^{12,0}$ )



$U_{12,0}^{24,0}$ と $U_{12,0}^{24,4}$ の2次元平面波はそれぞれ $U_{24,0}^{24,0}$ と $U_{24,0}^{24,4}$ の2次元平面波（図4と図5）よりy軸方向の周期が1/2であるため、 $U_{24,0}^{24,0}$ と $U_{24,0}^{24,4}$ に比べてy軸方向がつぶれたパターンを示す。  
 $U_{24,0}^{12,0}$ の2次元平面波は $U_{12,0}^{12,0}$ の2次元平面波（図6）よりy軸方向の周期が2倍であるため、 $U_{12,0}^{12,0}$ に比べてy軸方向が伸びたパターンを示す。

図15に時系列形式 $S_{12,0}^{24,0}$ 、 $S_{12,0}^{24,4}$ 、 $S_{24,0}^{12,0}$ の時系列を示した。

図15

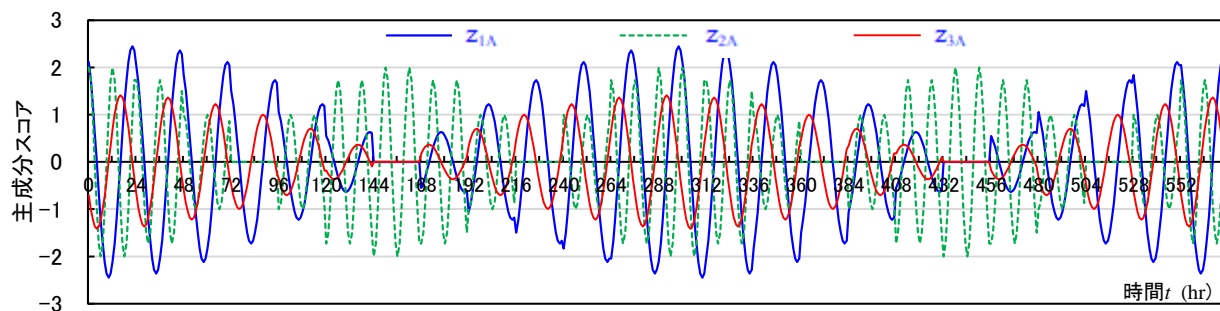


このCaseBの各時系列形式はCaseAの各時系列形式よりy軸方向の周期が異なるため、CaseAの場合よりも縮小あるいは拡大している。

CaseBの相関係数と主成分分析を求めたところ、相関係数はCaseAのそれと一致し、主成分分析結果もCaseAの結果と一致した（表1, 表2）。

図16にCaseBの主成分スコア $z_{1A}$ 、 $z_{2A}$ 、 $z_{3A}$ の時系列を示した。

図16



主成分スコア $z_{1B}$ 、 $z_{2B}$ 、 $z_{3B}$ の2次元平面波を図16, 図17, 図18に示した。

図17 ( $z_{1B}$ )

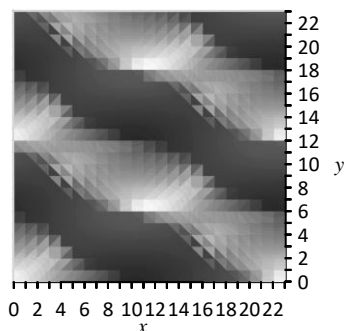


図18 ( $z_{2B}$ )

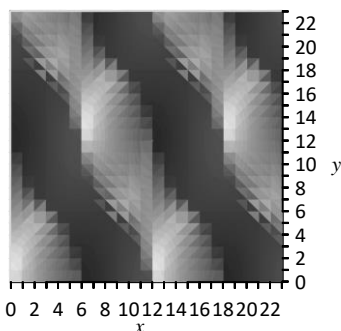
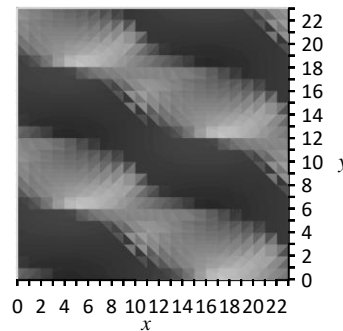


図19 ( $z_{3B}$ )



$z_{1B}$ と $z_{3B}$ の周期は $U_{12,0}^{24,0}$ と $U_{12,0}^{24,4}$ と一致した。 $z_{1B}$ と $z_{3B}$ は、 $x$ 軸方向の位相は $z_{1B}$ が2 hr ( $30^\circ = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$ )、 $z_{3B}$ が $z_{1B}$ より6 hr ( $90^\circ$ )大きかった。 $z_{2B}$ は $U_{24,0}^{12,0}$ と同じパターンを示した。このように、 $x$ 軸方向と $y$ 軸方向で周期が異なる2次元平面波の主成分分析結果は、CaseAの結果と同じ傾向を示した。

CaseAとCaseBはいずれも正規直交基底だからである。2次元コサイン波の直交性については、前報(参考文献3)で、行ベクトル $u_x$ の総和 $\sum u_m$ がゼロであることに起因していることを示した。2次元平面波においても同様に、 $m$ 次正方形行列における $x$ 軸方向と $y$ 軸方向の周期 $N_1$ と $N_2$ が $m/N_1 = m/N_2 =$ 正整数の関係すなわち $m$ が整数周期であれば、 $\sum u_m$ はゼロとなり、直交する。

これまでの結果をまとめると、 $x$ 軸方向と $y$ 軸方向で様々な周期をもつ複数の2次元平面波に主成分分析を適用した場合、まず、 $x$ 軸方向と $y$ 軸方向の各周期に対応した2次元平面波の周期別に群分けされ、次に、同一周期の2次元平面波の群の中で位相により分類されると解釈できる。

## 参考文献

### 1. JPEG圧縮の概念

[http://www.clg.niigata-u.ac.jp/~lee/jyugyou/info\\_system/medsys005\\_print.pdf](http://www.clg.niigata-u.ac.jp/~lee/jyugyou/info_system/medsys005_print.pdf)

### 2. マルチメディア工学9 マルチメディアデータの解析 離散コサイン変換とJPEG

[www.image.med.osaka-](http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/ics_lecture/multi_media/handout_2007/multi_media-9.pdf)

[u.ac.jp/member/yoshi/ics\\_lecture/multi\\_media/handout\\_2007/multi\\_media-9.pdf](http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/ics_lecture/multi_media/handout_2007/multi_media-9.pdf)

### 3. 物理のかぎしっぽ, 周期時系列の統計解析 (15) 2次元コサイン波の主成分分析

<http://hooktail.sub.jp/contributions/shuki15.pdf>

### 4. 物理のかぎしっぽ, 周期時系列の統計解析 (13) 周期時系列における主成分分析の意味

<http://hooktail.sub.jp/contributions/shuki13.pdf>

### 5. 物理のかぎしっぽ, 周期時系列の統計解析 (11) コサイン関数モデルによる主成分分析の検証

<http://hooktail.sub.jp/contributions/shuki11.pdf>