

周期時系列の統計解析

(15) 2次元コサイン波の主成分分析

nino

2020年6月4日

これまでは、コサイン関数を用いて1次元としての周期時系列に相関行列による主成分分析を適用し検討してきた。ここでは、2次元コサイン波の主成分分析を検討するとともに、周期時系列との関係についても考察した。

コサイン関数を用いた周期時系列

まず、コサイン関数を用いた周期時系列の概要を述べる（参考文献1, 2）。

周期時系列は次の離散型のコサイン関数 u_t で表される。

$$u_t = \cos 2\pi(t + \alpha)/N \quad (1)$$

ここで、 N ：周期， α ：位相，そして、 $t=0, 1, \dots, m-1$ である。

式(1)の時系列を次の行ベクトルで表す。しばしば時系列を列ベクトルで表す場合があるが、ここでは行ベクトルとした。詳細は後述する。

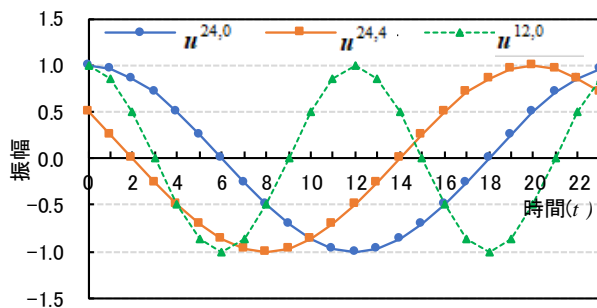
$$\mathbf{u}_m^{N,\alpha} = (u_0, u_1, \dots, u_t, \dots, u_{m-1}) \quad (2)$$

例として、期間を1日間($m=24$ hr)とし、1 hr間隔の時系列 $\mathbf{u}_{24}^{N,\alpha}$ を考える。以降、 $\mathbf{u}_{24}^{N,\alpha}$ を略して、 $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ とする。

$$\mathbf{u}^{N,\alpha} = (u_0, u_1, \dots, u_{23}) \quad (3)$$

図1に、周期が $N=24$ hrで位相が $\alpha=0$ hrと $\alpha=4$ hrの時系列 $\mathbf{u}^{24,0}$ と $\mathbf{u}^{24,4}$ および周期が $N=12$ hr(半日間)で位相が $\alpha=0$ hrの時系列 $\mathbf{u}^{12,0}$ を示した。これらは参考文献2に記載した時系列(図3-1)の1周期分に相当する。その主成分分析結果等については同文献を参照されたい。なお、周期 $N=24$ hrの場合は、1 hr当たり $360^\circ/24=15^\circ$ に相当する。

図1



2次元コサイン波

2次元コサイン波の例として、式(3)の行ベクトル $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ を縦に24個並べた行列、すなわち、次の24次正方行列 $\mathbf{P}^{N,\alpha}$ について考える。

$$\mathbf{P}^{N,\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{N,\alpha} \\ \mathbf{u}^{N,\alpha} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N,\alpha} \\ \mathbf{u}^{N,\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{22} & u_{23} \\ \downarrow y \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{22} & u_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{22} & u_{23} \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{22} & u_{23} \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (4)$$

この正方行列から、各 x_t を画素値としたExcelの標高線（2次元平面波）を描画することができる。

Excelを用いて、この正方行列から2次元コサイン波を描画するには、まず、式(4)に対応した表を作成した後、それを範囲指定して「挿入」>「3-D等高線」>「OK」をクリックする。次に、等高線をグレースケール様にするため、グラフを選択した後、「グラフツール」>「デザイン」>「色の変更」>「モノクロパレット3」をクリックする。

図2、図3、図4に $\mathbf{P}^{24,0}$ 、 $\mathbf{P}^{24,4}$ 、 $\mathbf{P}^{12,0}$ の2次元コサイン波を示した。

図2 ($\mathbf{P}^{24,0}$)

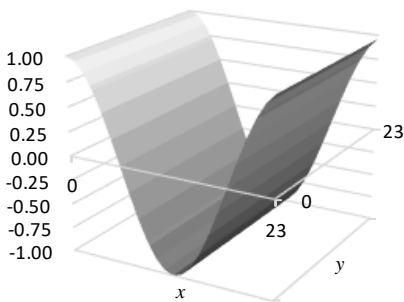


図3 ($\mathbf{P}^{24,4}$)

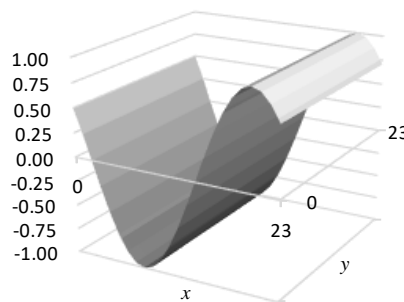
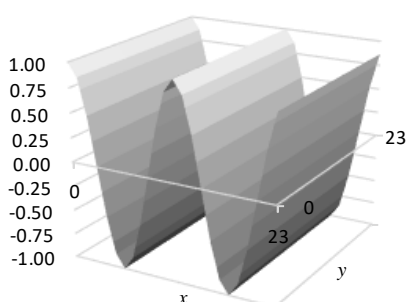


図4 ($\mathbf{P}^{12,0}$)



これら2次元コサイン波はいずれもx軸方向のみに変化しy軸方向には変化しない。x軸側からみると、それぞれ図1の時系列と同じ変化を示す。なお、これらの図では、x軸は手前にあり右方向に進み、y軸は奥（上）方向に進むが、行列形式の式(4)では、xは右方向に進み、y軸は下方向に進んでいることに留意。

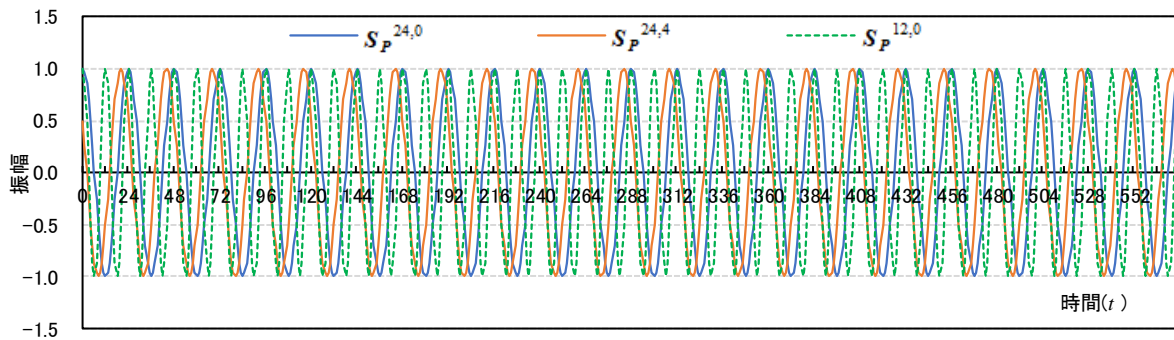
x軸方向のみに変化する2次元コサイン波の主成分分析

時系列データの主成分分析は式(3)の行ベクトルのデータを対象とするが、2次元コサイン波の主成分分析は式(4)のように行列形式になっているため、これを1行に並べ直してベクトル形式のデータに変換する必要がある。具体的には、1行目の行ベクトル $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ の最後に2行目の行ベクトル $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ を結合し、以下同様に、最後の24行目の行ベクトル $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ まで結合する。結局、式(3)の行ベクトル $\mathbf{u}^{N,\alpha}$ が24個連結した行ベクトルとなり、時系列と同じ扱いが可能となる。この連結した行ベクトルを時系列形式 $\mathbf{S}_P^{N,\alpha}$ といい、次式で表される。以降、時系列形式 $\mathbf{S}_P^{N,\alpha}$ の横軸を時間 t (hr) とする ($t=0,1,2,\dots,575$)。

$$\mathbf{S}_P^{N,\alpha} = (\mathbf{u}^{N,\alpha}, \mathbf{u}^{N,\alpha}, \dots, \mathbf{u}^{N,\alpha}) = (u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}) \quad (5)$$

図 5 に、時系列形式 $S_P^{24,0}$ と $S_P^{24,4}$ および $S_P^{12,0}$ を示した。

図 5



これら 3 つの時系列形式はそれぞれ図 1 の時系列 (1 周期分) が 24 個連結したものとなる。

なお、先述したように、しばしば式 (1) の時系列を列ベクトルで表す場合があり、実際に参考文献 1, 2 などでは、Excel を用いて列ベクトルのデータに主成分分析を適用している。したがって、行ベクトルとしての時系列形式 $S_P^{N,\alpha}$ を列ベクトルに転置した $^T S_P^{N,\alpha}$ に変換してから主成分分析を行った。以降、同様である。

まず、3 つの時系列形式の相関係数を調べた (表 1)。

表 1

	$S_P^{24,0}$	$S_P^{24,4}$	$S_P^{12,0}$
$S_P^{24,0}$	1		
$S_P^{24,4}$	0.500	1	
$S_P^{12,0}$	0.000	0.000	1

表 1 によると、 $S_P^{24,0}$ と $S_P^{24,4}$ の相関係数は 0.500 ($= \cos[2\pi(4/24)] = \cos 60^\circ$) であるが、両者と $S_P^{12,0}$ との相関係数はいずれもゼロであった。周期が異なるコサイン関数は直交しているからである (参考文献 2)。

次に、これら 3 つの時系列形式 $S_P^{N,\alpha}$ に主成分分析を適用した結果を表 2 に示した。なお、それら 3 つの主成分を z_{1P} , z_{2P} , z_{3P} とした。

表 2

主成分分析結果	z_{1P}	z_{2P}	z_{3P}	固有ベクトル	z_{1P}	z_{2P}	z_{3P}
固有値	1.500	1.000	0.500	$S_P^{24,0}$	0.707	0	-0.707
寄与率	0.500	0.333	0.167	$S_P^{24,4}$	0.707	0	0.707
累積寄与率	0.500	0.833	1.000	$S_P^{12,0}$	0	1	0

固有ベクトルをみると、 $S_P^{24,0}$ と $S_P^{24,4}$ は $S_P^{12,0}$ とは完全に分離され、 $S_P^{12,0}$ は z_{2P} に等しかった。 $S_P^{24,0}$ と $S_P^{24,4}$ は $S_P^{12,0}$ と直交していることによる。そのため、 $S_P^{24,0}$ と $S_P^{24,4}$ の固有値および固有ベクトルは両者のみに主成分分析を適用した結果と一致した (参考文献 2)。

図 6 に主成分スコア z_{1P} , z_{2P} , z_{3P} の時系列を示した.

図 6

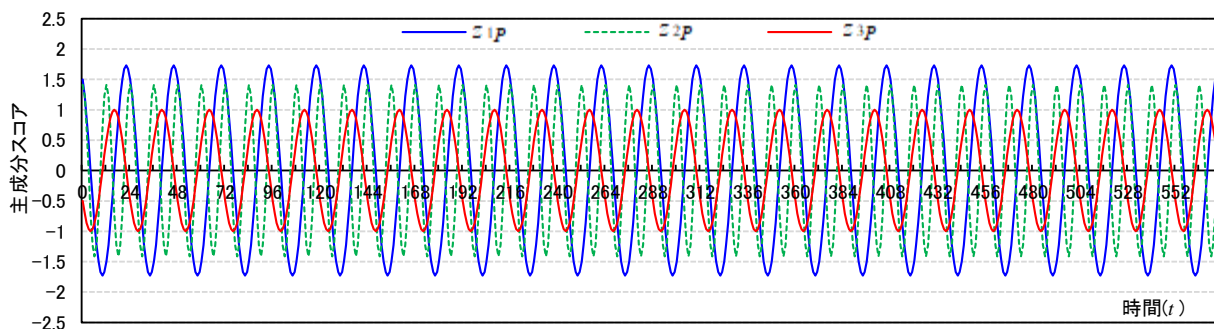


図 6 によると, z_{1P} の位相は 2 hr (30°), そして z_{3P} の位相は 8 hr ($120^\circ = 30 + 90^\circ$) となり, 両者の位相差は 90° (直交関係) であった. また, z_{2P} の位相は変わらなかった.

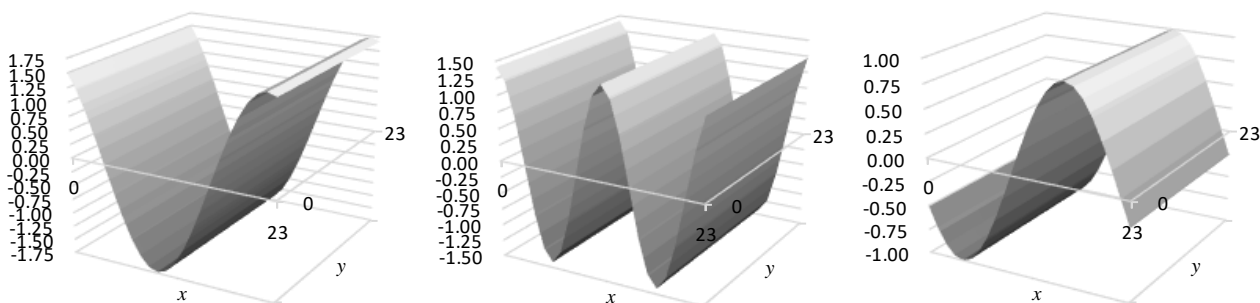
時系列形式で得られた主成分スコアを 2 次元コサイン波の行列形式に戻すには, 前述の行列形式 $P^{N,\alpha}$ から時系列形式 $S_P^{N,\alpha}$ に並べ直した操作の逆を行えば良い.

図 7, 図 8, 図 9 に主成分 z_{1P} , z_{2P} , z_{3P} の 2 次元コサイン波を示した.

図 7 (z_{1P})

図 8 (z_{2P})

図 9 (z_{3P})



x 軸方向からみた各主成分の位相は図 6 のそれぞれ 1 周期分 ($t=0 \sim 23$) と対応している.

次に, y 軸方向のみに変化する x 軸方向には変化しない 2 次元コサイン波 $Q^{N,\alpha}$ および斜め方向に変化する 2 次元コサイン波 $R^{N,\alpha}$ の主成分分析について, $P^{N,\alpha}$ の場合と同様に検討する.

y 軸方向のみに変化する 2 次元コサイン波の主成分分析

y 軸方向のみに変化する x 軸方向には変化しない 2 次元コサイン波 $Q^{N,\alpha}$ は, 式 (3) の行ベクトル $u^{N,\alpha}$ を転置した列ベクトルを ${}^T u^{N,\alpha}$ を横方向に 24 個並べた行列 $Q^{N,\alpha}$ で表される. 行列 $Q^{N,\alpha}$ は行列 $P^{N,\alpha}$ の転置行列 ${}^T P^{N,\alpha}$ に相当する.

$${}^T u^{N,\alpha} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} \quad (6)$$

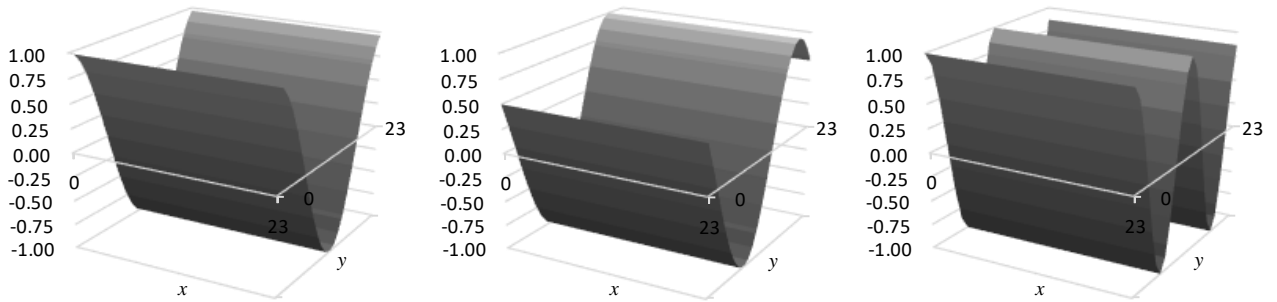
$$\mathbf{Q}^{N,\alpha} = \left[\begin{array}{c} T_{u_0}^{N,\alpha}, T_{u_1}^{N,\alpha}, \dots, T_{u_{22}}^{N,\alpha}, T_{u_{23}}^{N,\alpha} \end{array} \right] = \begin{pmatrix} u_0 & u_0 & \cdots & u_0 & u_0 \\ u_1 & u_1 & \cdots & u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{22} & u_{22} & \cdots & u_{22} & u_{22} \\ u_{23} & u_{23} & \cdots & u_{23} & u_{23} \end{pmatrix} \quad (7)$$

図10, 図11, 図12に2次元コサイン波 $\mathbf{Q}^{24,0}$, $\mathbf{Q}^{24,4}$, $\mathbf{Q}^{12,0}$ を示した.

図10 ($\mathbf{Q}^{24,0}$)

図11 ($\mathbf{Q}^{24,4}$)

図12 ($\mathbf{Q}^{12,0}$)



これら2次元コサイン波はy軸方向のみに変化しx軸方向には変化しない. y軸側からみると, 時系列(図1)と同じ変化を示す.

この場合も, 式(7)の正方行列 $\mathbf{Q}^{N,\alpha}$ を時系列形式 $\mathbf{S}_Q^{N,\alpha}$ に並べ直してから, 主成分分析を適用した.

$$\mathbf{S}_Q^{N,\alpha} = (u_0, u_0, \dots, u_0, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots, u_{22}, u_{22}, \dots, u_{22}, u_{23}, u_{23}, \dots, u_{23}) \quad (8)$$

$\mathbf{S}_Q^{N,\alpha}$ は同じ値 u_t ($t=0\sim 23$)がそれぞれ連続して24個ずつ順に並んでいる.

図13に時系列形式 $\mathbf{S}_Q^{24,0}$, $\mathbf{S}_Q^{24,4}$, $\mathbf{S}_Q^{12,0}$ を示した.

図13

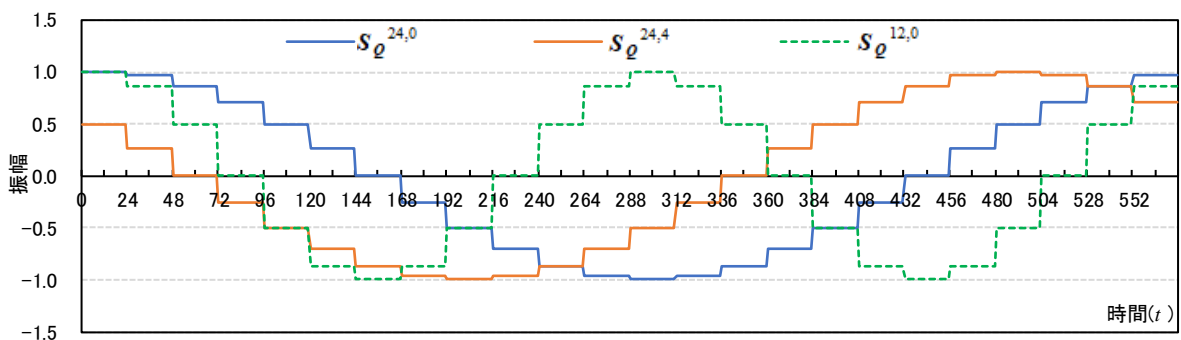


図13によると, 3つの時系列形式はいずれも24個の同一値が順に並んでいる階段状の変化を示した. それぞれ同一値を示す期間は図5の $\mathbf{S}_P^{24,\alpha}$ の各1周期分あるいは $\mathbf{S}_P^{12,0}$ の各2周期分に相当する. ここで, 各同一値の期間をそれぞれ1つの時点と仮定すると, $\mathbf{S}_Q^{24,\alpha}$ の周期は24 hr, $\mathbf{S}_Q^{12,\alpha}$ の周期は12 hrとなり, 図1と対応している. こう考えると, 直感的にわかりやすい.

これら3つの時系列形式 $S_Q^{24,0}$, $S_Q^{24,4}$, $S_Q^{12,0}$ の相関係数は前述の3つの時系列形式 $S_P^{24,0}$, $S_P^{24,4}$, $S_P^{12,0}$ の相関係数(表1)と一致した。

したがって、時系列形式 $S_Q^{N,\alpha}$ の主成分分析結果も時系列形式 $S_P^{N,\alpha}$ の主成分分析結果(表2)と一致した。

次に、 z_{1Q} , z_{2Q} , z_{3Q} の主成分スコアの時系列について調べた(図14)。

図14

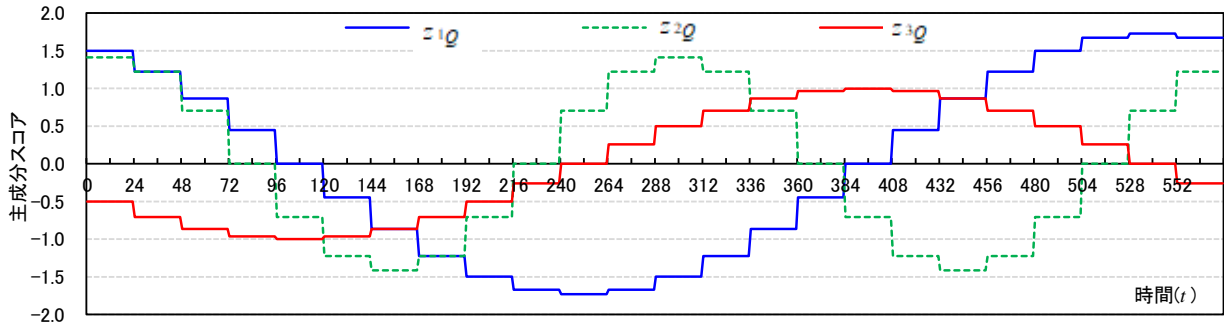


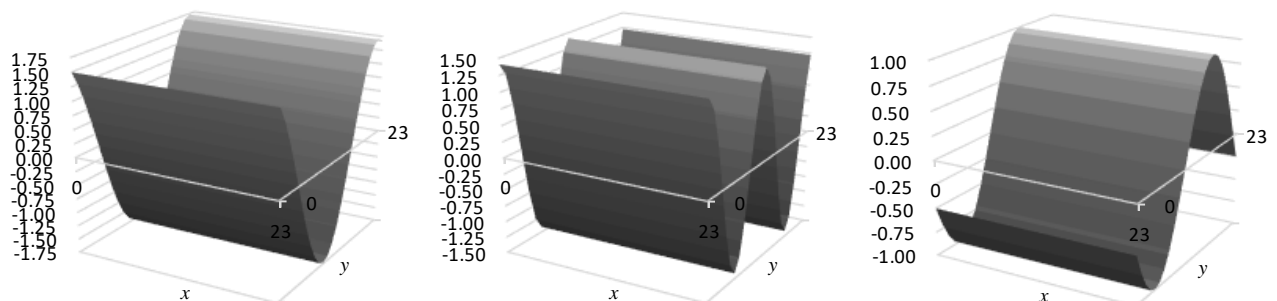
図14において、 z_{2Q} の位相は $S_Q^{12,0}$ の位相と一致した(図13)。また、先述したように一定値の期間をそれぞれ1つの時点と仮定した場合、 z_{1Q} の位相は2 hr、 z_{3Q} の位相は8 hrを示した。これらの結果は図6の1周期分(24個)と対応している。

図15, 図16, 図17に主成分 z_{1Q} , z_{2Q} , z_{3Q} の2次元コサイン波を示した。

図15 (z_{1Q})

図16 (z_{2Q})

図17 (z_{3Q})



z_{1Q} と z_{2Q} と z_{3Q} の2次元コサイン波の位相はx軸方向のみに変化する2次元コサイン波の主成分分析結果(図7~図9)のx軸とy軸を入れ替えたものと一致した。

斜め方向に変化する2次元コサイン波の主成分分析

斜め方向に変化する2次元コサイン波 $R^{N,\alpha}$ の簡単な例として、式(4)に示した2次元コサイン波の行列 $P^{N,\alpha}$ において、1行目はそのまま、2行目は時点を1つ右に移動し(1 hr遅らせ)、3行目は時点を2つ右に移動する(2 hr遅らせる)というやり方で、順次、下行に向かって時点を1つずつ右に移動させる(1 hrずつ遅らせる)。そうすると、次の行列 $R^{N,\alpha}$ が得られる。

$$\mathbf{R}^{N,\alpha} = \begin{pmatrix}
 u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{22} & u_{23} \\
 u_{23} & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{21} & u_{22} \\
 u_{22} & u_{23} & u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{20} & u_{21} \\
 u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_0 & u_1 & \cdots & u_{19} & u_{20} \\
 u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_0 & \cdots & u_{18} & u_{19} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & \cdots & u_0 & u_1 \\
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \cdots & u_{23} & u_0
 \end{pmatrix} \tag{9}$$

式(9)は、 u_0 等が左上から右下に向かって対角線上にあることから、斜め45度方向に変化する2次元コサイン波の行列を表すことがわかる。

例として、 $\mathbf{R}^{24,0}$ の3D表示等高線と等高線を図18と図19に示した。

図18 ($\mathbf{R}^{24,0}$)

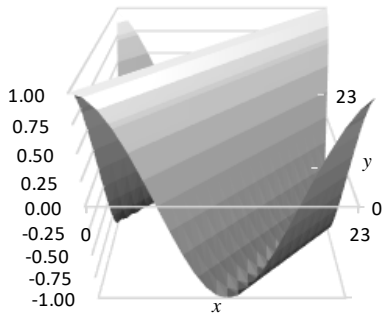


図19 ($\mathbf{R}^{24,0}$)

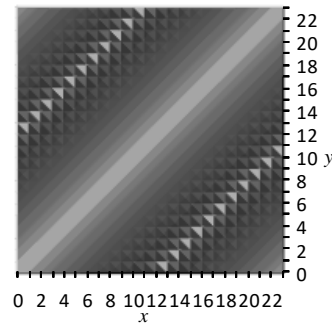


図18や図19はx軸の45度方向からみると、時系列(図1)と類似した変化を示す。これまでは、時系列と2次元コサイン波の関係を調べるために、3D表示等高線を用いてきたが、斜め方向に変化する2次元コサイン波については、3D表示等高線(図18)よりも等高線(図19)のほうがわかりやすい。以降は、等高線を用いることにした。

図19(再掲)と図20に周期が $N=24$ hrで位相が $\alpha=0$ hrと $\alpha=4$ hrの場合における斜め45度方向に変化する2次元コサイン波 $\mathbf{R}^{24,0}$ と $\mathbf{R}^{24,4}$ 、および図21に周期が $N=12$ hrで位相 $\alpha=0$ hrの場合における斜め45度方向に変化する2次元コサイン波 $\mathbf{R}^{12,0}$ の等高線を示した。

図19 ($\mathbf{R}^{24,0}$)

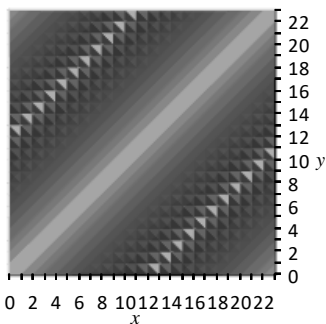


図20 ($\mathbf{R}^{24,4}$)

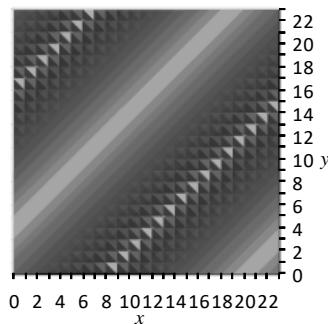


図21 ($\mathbf{R}^{12,0}$)

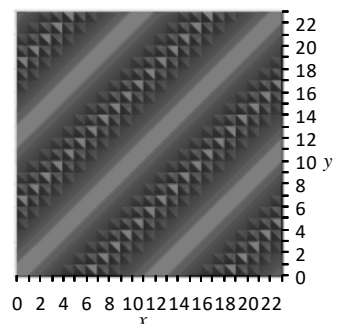


図20は図19より x 軸の左方向に4 hr移動した（4hr進みの）2次元コサイン波を表し，図21は周期が図19の半分の2次元コサイン波を表している．

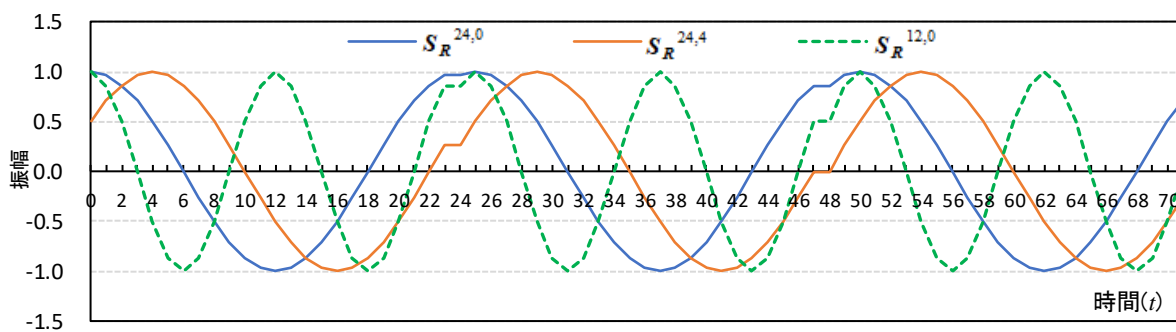
これら3つの2次元コサイン波 $R^{N,\alpha}$ の時系列形式 $S_R^{N,\alpha}$ は，次式で表される．

$$S_R^{N,\alpha} = (u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, u_{23}, u_0, \dots, u_{21}, u_{22}, u_{22}, u_{23}, \dots, u_0, u_1, u_1, u_2, \dots, u_{23}, u_0) \quad (10)$$

式(10)は，式(9)と比べればわかるように，最初の $u_0 \sim u_{23}$ の24個のデータの後に，その最後のデータ u_{23} と同じデータ u_{23} が続き，その後に u_0 で始まる連続した23個のデータが続くというふうに u_i が1個ずつ右に移動して連結する行ベクトルになっている．

時系列が長いとわかりにくいので，各時系列形式 $S_R^{N,\alpha}$ の最初の3周期分を図22に示した．

図22



3つの時系列形式はいずれも23 hrと24 hrおよび47 hrと48 hrが同じ値を示した．これ以降も同様に24 hr間隔ごとに連続する2つの時点で同じ値を示す．

$S_R^{N,\alpha}$ の相関係数は $S_P^{N,\alpha}$ や $S_Q^{N,\alpha}$ の相関係数（表1）と一致した．このように， $S_P^{N,\alpha}$ と $S_Q^{N,\alpha}$ と $S_R^{N,\alpha}$ の各時系列形式グループの相関係数が一致するのは，各グループ間の同じ周期と位相をもつ時系列形式を並べ替えると同じ時系列形式となるからである．例えば， $S_P^{24,0}$ を並べ替えると $S_Q^{24,0}$ や $S_R^{24,0}$ が得られる．また，詳細は省略するが，時系列形式の並べ替えをしなくても，散布図を用いると，各グループの散布図は一致することがわかる．散布図は時間(順番)の影響をなくしたものだからである．

また，時系列形式 $S_R^{24,0}$ ， $S_R^{24,4}$ ， $S_R^{12,0}$ の主成分分析結果も表2と一致した．

図23に主成分スコア z_{1R} ， z_{2R} ， z_{3R} の3周期分の時系列を示した．

図23

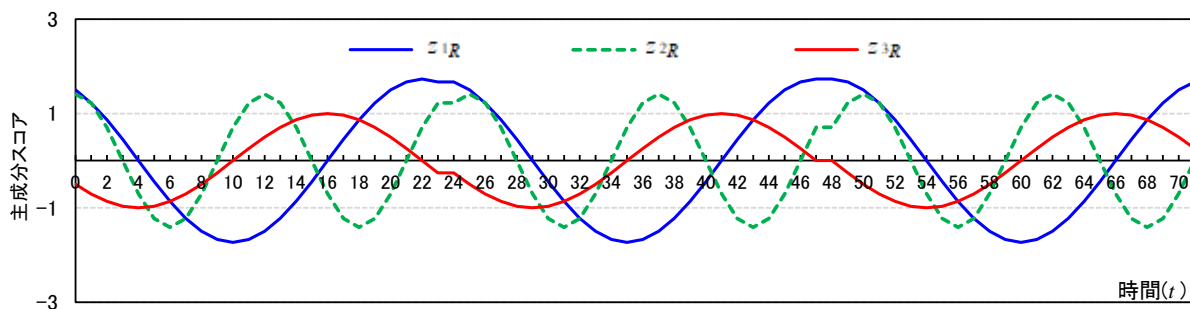
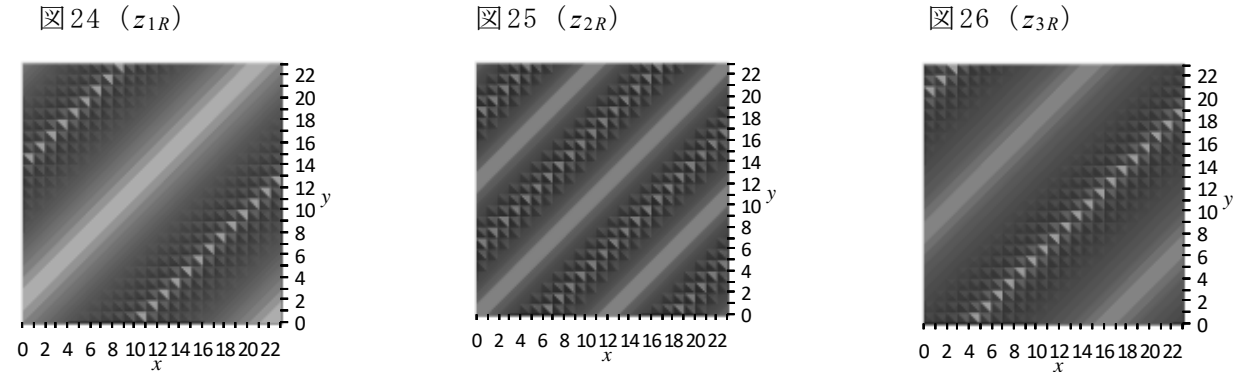


図23は図22と同様に、3つの主成分スコアも23 hrと24 hrおよび47 hrと48 hrが同じ値を示した。一方、 z_{1R} の位相は z_{3R} の位相より6 hr (90°) 遅れであり、また、 z_{2R} の位相は $S_R^{12,0}$ の位相(図22)と一致した。

図24, 図25, 図26に主成分 z_{1R} , z_{2R} , z_{3R} の2次元コサイン波を示した。



z_{1R} と z_{3R} はともに周期が24 hrあり、 z_{1R} の位相は2 hr進み、 z_{3R} の位相は8 hr進みであった。また、 z_{2R} の位相は $R^{12,0}$ (図21)と一致した。このように、斜め45度方向に変化する2次元コサイン波についても、 x 軸方向のみにおよび y 軸方向のみに変化する2次元コサイン波の主成分分析結果と同様の結果が得られた。

3つの方向の2次元コサイン波の主成分分析

方向が異なる2次元コサイン波間の関係を含めて調べるため、 $P^{N,\alpha}$, $Q^{N,\alpha}$, $R^{N,\alpha}$ の各グループ3つずつの時系列形式の総計9つの時系列形式に主成分分析を適用した。

まず、相関係数について調べた(表3)。表3では、グループ毎に実線で囲んである。

	$S_P^{24,0}$	$S_P^{24,4}$	$S_P^{12,0}$	$S_Q^{24,0}$	$S_Q^{24,4}$	$S_Q^{12,0}$	$S_R^{24,0}$	$S_R^{24,4}$	$S_R^{12,0}$
$S_P^{24,0}$	1								
$S_P^{24,4}$	0.500	1							
$S_P^{12,0}$	0.000	0.000	1						
$S_Q^{24,0}$	0.000	0.000	0.000	1					
$S_Q^{24,4}$	0.000	0.000	0.000	0.500	1				
$S_Q^{12,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1			
$S_R^{24,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1		
$S_R^{24,4}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	1	
$S_R^{12,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1

表3より、3つのグループはそれぞれ表1と同じ相関係数を示すほか、各グループ間の相関係数は全てゼロを示しており、相互に直交することが示唆された。

次に、9つの時系列形式の主成分分析結果について調べた(表4)。

表 4

	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
固有値	1.500	1.500	1.500	1.000	1.000	1.000	0.500	0.500	0.500
寄与率	0.167	0.167	0.167	0.111	0.111	0.111	0.056	0.056	0.056
累積寄与率	0.167	0.333	0.500	0.611	0.722	0.833	0.889	0.944	1.000
固有ベクトル									
$S_P^{24,0}$	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.707	0.000	0.000
$S_P^{24,4}$	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707	0.000	0.000
$S_P^{12,0}$	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$S_Q^{24,0}$	0.000	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.707	0.000
$S_Q^{24,4}$	0.000	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707	0.000
$S_Q^{12,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$S_R^{24,0}$	0.000	0.000	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.707
$S_R^{24,4}$	0.000	0.000	0.707	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707
$S_R^{12,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000

表 4 から、固有値は $z_1 \sim z_3$ が 1.500, $z_4 \sim z_6$ が 1.000, $z_7 \sim z_9$ が 0.500 と、それぞれ同じ値を示した。また、固有ベクトルは、 $z_1 \sim z_3$ が各グループ ($S_P^{N,\alpha}$, $S_Q^{N,\alpha}$, $S_R^{N,\alpha}$) においてそれぞれ同じ値 (0.707, 0.707, 0.000) を示した。同様に、 $z_4 \sim z_6$ がそれぞれ同じ値 (0.000, 0.000, 1.000), $z_7 \sim z_9$ がそれぞれ同じ値 (-0.707, 0.707, 0.000) を示した。これら各グループの固有ベクトルはそれぞれ表 2 と一致する。例えば、 $S_P^{N,\alpha}$ についてみると、表 4 の z_1 と z_4 と z_7 がそれぞれ表 2 の z_{1P} と z_{2P} と z_{3P} に対応している。 $S_Q^{N,\alpha}$ と $S_R^{N,\alpha}$ についても、同様である。したがって、各グループの主成分スコアの 2 次元コサイン波は、それぞれグループ別の主成分分析結果 (図 7 ~ 9, 図 15 ~ 17, 図 24 ~ 26) と一致する。これら結果は相関係数表 (表 3) から容易に予想される。

さらに、斜め 45 度以外の様々な方向に変化する 2 次元コサイン波 (詳細は後述) についても検討したところ、同様の結果が得られた。これら方向が異なる 2 次元コサイン波のグループ間では相互に直交しているためと考えられた。

方向が異なる 2 次元コサイン波の直交性

2 つのベクトルの直交条件はそれらの内積がゼロであることを示せば良い (参考文献 3)。

例として、 x 軸方向のみに変化する時系列形式 $S_P^{24,0}$ と y 軸方向のみに変化する時系列形式 $S_Q^{24,0}$ の内積を求めてみる。式 (5) と式 (8) より、 $S_P^{24,0}$ と $S_Q^{24,0}$ の内積は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 S_P^{24,0} \cdot S_Q^{24,0} &= (u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, \dots, \dots, u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}, u_0, u_1, \dots, u_{22}, u_{23}) \\
 &\quad \cdot (u_0, u_0, \dots, u_0, u_0, u_1, u_1, \dots, u_1, u_1, \dots, \dots, u_{22}, u_{22}, \dots, u_{22}, u_{22}, u_{23}, u_{23}, \dots, u_{23}, u_{23}) \\
 &= (u_0, u_1, \dots, u_{23})u_0 + (u_0, u_1, \dots, u_{23})u_1 + \dots, + (u_0, u_1, \dots, u_{23})u_{22} + (u_0, u_1, \dots, u_{23})u_{23} \\
 &= u_0 \sum u_t + u_1 \sum u_t + \dots, + u_{22} \sum u_t + u_{23} \sum u_t \\
 &= \sum u_t \sum u_t
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

ここで、 $\sum u_t$ は式(1)よりコサイン関数の1周期分の和すなわち、

$$\sum_{t=0}^{23} u_t = 0 \quad (12)$$

である。したがって、 $\mathbf{S}_P^{24,0}$ と $\mathbf{S}_Q^{24,0}$ の内積の式(11)はゼロとなり、 x 軸方向のみ変化する2次元コサイン波 $\mathbf{P}^{24,0}$ と y 軸方向のみに変化する2次元コサイン波 $\mathbf{Q}^{24,0}$ は直交する。

一方、位相 $\alpha=4$ hrの場合 ($\mathbf{S}_P^{24,4}$ や $\mathbf{S}_Q^{24,4}$) は $\sum u_t$ の開始時点が異なるだけで、 $\sum u_t$ は1周期分で同じであるから、それらの内積はゼロとなる。周期 $N=12$ hrの場合においても、 $\sum u_t$ は2周期分になるだけで、それらの内積はゼロとなる。さらに、斜め方向に変化する2次元コサイン波 $\mathbf{S}_R^{N,\alpha}$ も $\sum u_t$ の開始時点が1つずつ遅れるだけで、 $\sum u_t$ は同じであるから、それらの内積はゼロとなる。結局、方向が異なる2次元コサイン波は相互に直交する。

以上の結果を要約すると、方向、周期および位相が異なる複数の2次元コサイン波に主成分分析を適用した場合、まず、2次元コサイン波は方向別に群分けされ、次に、同一方向の群の中で周期別に群分けされる。さらに、同一周期の群の中で位相により分類されると解釈できる。

なお、これまで行列形式を時系列形式に変換してから主成分分析を行うという方法を用いたので、冗長な説明となった。それは2次元コサイン波と時系列の関係を調べることを考慮したためであった。また、ExcelのSUMPRODUCT関数を用いると、正方行列そのものから簡単に内積を求めることができる(参考文献4, 5)。例えば、2次元コサイン波 $\mathbf{P}^{N,\alpha}$ と $\mathbf{Q}^{N,\alpha}$ の内積はSUMPRODUCT関数において式(4)と式(7)を範囲指定して計算すれば求まる。

様々な方向に変化する2次元コサイン波について

斜め45度以外の様々な方向に変化する2次元コサイン波については、2次元フーリエ変換の正規直交基底をもとに次式 $\mathbf{W}^{N_1, \alpha_1, N_2, \alpha_2}$ で表すことができる。

$$\mathbf{W}^{N_1, \alpha_1, N_2, \alpha_2} = \cos 2\pi \{ (x + \alpha_1)/N_1 + (y + \alpha_2)/N_2 \} \quad (13)$$

ここで、 N_1 : x 軸方向の周期、 α_1 : x 軸方向の位相、 N_2 : y 軸方向の周期、 α_2 : y 軸方向の位相である。

式(13)は2次元フーリエ変換の正規直交基底(実部)に位相を加えて変形したものである(参考文献6, 7)。式(13)を用いると、例えば、 $\mathbf{P}^{24,0}$ は、 $N_1=24$, $\alpha_1=0$, $N_2=1$, $\alpha_2=0$ で、また、 $\mathbf{R}^{24,0}$ は、 $N_1=24$, $\alpha_1=0$, $N_2=-24$, $\alpha_2=0$ で表される。

ただし、離散型なので、方向(角度)には制約がある。詳細は参考文献を参照。

参考文献

1. 物理のかぎしっぽ, 周期時系列の統計解析 (11)コサイン関数モデルによる主成分分析の検証

<http://hooktail.sub.jp/contributions/shukill.pdf>

2. 物理のかぎしっぽ, 周期時系列の統計解析 (13)周期時系列における主成分分析の意味

<http://hooktail.sub.jp/contributions/shuki13.pdf>

3. 高校数学の基本問題, ベクトルの直交条件

https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/electro/orthogonal_vector1.htm

4. 具体例で学ぶ数学, 行列の内積の定義と性質

<https://mathwords.net/gyoretunonaiseiki>

5. 高校数学の基本問題, Excelを用いたベクトルの計算

https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/kou3/excel_vector1.htm

6. 医療科学社, <第4章> 2次元フーリエ変換

<http://www.iryokagaku.co.jp/frame/03-honwosagasu/449/449-4shou.pdf>

7. 千葉大学 羽石研究室, 2次元フーリエ変換

www.cfme.chiba-u.jp/~haneishi/class/2008/2008_5.pdf