

周期時系列の統計解析

(8) 潮位偏差の重回帰モデル

nino

2018年9月9日

潮位偏差は実際に観測される潮位と天体の動きから算出した天文潮位の差（実測潮位－天文潮位）であり，気圧や風などの気象の影響等によって引き起こされる．ここでは，潮位偏差の時系列の式を求め，その時系列モデルに重回帰分析を適用し検討した．

高潮について

高潮は台風や発達した低気圧が海岸部を通過する際に生じる海面の高まりであり，高潮の発生の主要因としては，吸い上げ効果と吹き寄せ効果がある（参考文献1）．吸い上げ効果は，低気圧によって海面が持ち上げられる現象であり，外洋では気圧が1hPa低下すると海面は約1cm上昇する．一方，吹き寄せ効果とは，風が沖から海岸に向かって吹いた時に，海水が海岸に吹き寄せられて海岸付近の海面が上昇する現象である．吹き寄せ効果による海面上昇は風速の2乗に比例し，遠浅の海や風が吹いてくる方向に開いた湾の場合，地形が海面上昇を助長させるように働き，潮位がより高くなる．特に，U字湾よりもV字型の湾で海面が上昇しやすい．

高潮の予測式は，吸い上げ効果と吹き寄せ効果を考慮した次式が一般的に用いられている（参考文献2）．

$$h = a(1010 - P) + bW^2 \cos \theta + c \quad (1)$$

ここで， h は最大潮位偏差（cm）， P は最低気圧（hPa）， W は最大風速（m/s）， θ は最大風速の風向と湾の開口方向（長軸方向）との角度である． a ， b ， c は各湾で決められた係数であり，各地点により異なる．

潮位偏差の時系列

式(1)は，台風通過時の観測地点における最低気圧と最大風速および風向を代入することで，簡易的に最大潮位偏差だけを求める式であり，それぞれ発生時刻は一致していなくても良い．そのため，数値モデルを用いて時間ごとの潮位偏差を算出する方法があるが（参考文献3，4など），難しく手間がかかるなどの課題がある．一方，気象データだけを用いて潮位偏差の時系列を算出することができれば，過去の台風による高潮の評価や，今後発生する高潮の予測に役立てることができる．

そこで，式(1)を変形して潮位偏差の時系列の式を求めることを試みた．気象庁の潮位偏差と気象データ（参考文献5，6）は1時間間隔の離散値であるので，時点を i （ $i=0, 1, 2, \dots, n$ ）とすると，式(1)より次式が得られる．

$$h_i = a(1010 - P_i) + bW_i^2 \cos \theta_i + c \quad (2)$$

式(2)において，まず，気圧と定数の項を次のように整理した．

$$a(1010 - P_i) + c = -aP_i + (1010a + c) \quad (3)$$

右辺第1項については、 $-aP_i$ の負号を新しい係数 A の中に包含させて AP_i とした。こうすると、 A が負の時に潮位偏差は正すなわち増加することを意味している。第2項のうち、1010hPaは基準気圧を示しているが、気圧には地域差があり、季節変動もあることから、基準気圧を一律に1010hPaとするには無理がある。そこで、基準気圧も未知数として、 $1010a + c$ を併せて新しい定数項 C とする。結局、式(3)は次のように変形できる。

$$-aP_i + (1010a + c) \Rightarrow AP_i + C \quad (4)$$

次に、式(2)の風の項については、地形の係数 b と風向効果 $\cos\theta$ の2つが含まれている。前者については、潮汐観測地点の多くは湾内や外洋に面した港内に設置されていることから(参考文献7)、湾の地形だけではなく、港の形状も考慮する必要がある。港の形状は様々であり、また、様々な形状の防波堤で囲まれている。そのような港のどの場所に観測地点が設置されているのかによっても、風の影響は異なる。例えば、北に開口した港においては、式(2)によると東風と西風はそれぞれ $\theta=90$ 度と 270 度に相当し、ともに $\cos\theta=0$ となり、係数 b とは無関係に風の影響はゼロとなる。しかし、例えば、東西方向に長くかつ防波堤に囲まれた間口の狭い港の東端に観測地点がある場合は、西風は正の潮位偏差を生じさせ、逆に、東風は負の潮位偏差を生じさせることが予想される。このように、湾の地形とともに、港の形状や観測地点の位置によっても風は潮位偏差に複雑に影響することから、地形等と風向の効果をもとめて一つの係数 $b\cos\theta$ として扱うのが妥当と考えられる。

一方、後者の風向の効果は θ を連続変数とした $\cos\theta$ で表されている。しかし、気象データの風向は16方位の離散値であることから、 $\cos\theta \Rightarrow \cos\{(360/16)m\} = \cos(22.5m)$ とした。ここで、 $m=0,1,2,\dots,15$ であり、 θ は角度間隔が 22.5 度の離散値となる。そこで、地形等による係数 b と風向の効果 $\cos\theta$ を合わせて一つの係数 B_m とした。

$$b\cos\theta \Rightarrow b\cos(22.5m) = B_m \quad (5)$$

係数 B_m は、 $m=0(0$ 度)の時は北(N)、 $m=1(22.5$ 度)の時は北北東(NNE)、 \dots というように風向を北から時計回り順とした。表1に風向と係数 B_m の対応表を示した。

表1 風向と係数 B_m の対応表

風向	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
係数	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}

したがって、式(2)の第2項は、 $b\cos\theta_i \Rightarrow B_{k(i)}$ に置き換えることができる。ここで、 $k(i)=m$ であり、 $0\sim 15$ のうちの1つの値をとる。すなわち、係数 $B_{k(i)}$ は時点 i における風向に対応した係数 B_m を意味しており、 $B_0\sim B_{15}$ のうちの一つの係数をとる。

以上をまとめると、潮位偏差の時系列 H_i は次式で表される。

$$H_i = AP_i + B_{k(i)}W_i^2 + C \quad (6)$$

ここで、 H_i, P_i, W_i はそれぞれ時点 i における潮位偏差、気圧、風速である。また、 A は係数、 $B_{k(i)}$ は時点 i における係数 B_m 、 C は定数項である。

潮位偏差の重回帰モデル

実際の潮位偏差は、式(6)に誤差項 ε_i を加えた次式で表される。

$$H_i = AP_i + B_{k(i)}W_i^2 + C + \varepsilon_i \quad (7)$$

ここで、式(7)の W_i^2 については、例えば、 $W_i^2 = w_i$ として1つの変数として扱えば、式(7)は連立一次方程式であり、潮位偏差の重回帰モデルとして重回帰分析で解くことができる。

しかし、係数 $B_{k(i)}$ が定まっていないので、わかりにくいと思われる。実際の風向はランダムにあるいは偏ったりして変化しているが、わかりやすい例として、風向が北(N)から時計回り順に22.5度ずつ変化する場合について検討する。すなわち、 $B_{k(i)} = B_{(i \bmod 16)}$ の場合である。以降、時計回りの重回帰モデルという。

時計回りの重回帰モデルは次の連立一次方程式で表すことができる。なお、データ数 n は16の倍数とした。

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= AP_0 + B_0W_0^2 + C + \varepsilon_0 \\ H_1 &= AP_1 + B_1W_1^2 + C + \varepsilon_1 \\ H_2 &= AP_2 + B_2W_2^2 + C + \varepsilon_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ H_{14} &= AP_{14} + B_{14}W_{14}^2 + C + \varepsilon_{14} \\ H_{15} &= AP_{15} + B_{15}W_{15}^2 + C + \varepsilon_{15} \\ H_{16} &= AP_{16} + B_0W_{16}^2 + C + \varepsilon_{16} \\ H_{17} &= AP_{17} + B_1W_{17}^2 + C + \varepsilon_{17} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ H_n &= AP_n + B_{15}W_n^2 + C + \varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

時計回りの重回帰モデルを行列で表した場合を図1に示した。

図1 時計回りの重回帰モデルの行列表現

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ H_{14} \\ H_{15} \\ H_{16} \\ H_{17} \\ \cdot \\ \cdot \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & W_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_1 & 0 & W_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 & W_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{14}^2 & 0 & 1 \\ P_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{15}^2 & 1 \\ P_{16} & W_{16}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_{17} & 0 & W_{17}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_n^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{14} \\ B_{15} \\ C \end{pmatrix}$$

また、表2には、図1に対応した重回帰の分析表を示した。ただし、定数項はすでに重回帰ソフトに組み込まれているとして、省略してある。

表 2 時計回りの重回帰モデルの重回帰分析表

目的変数	説明変数																
	気圧	風速 ²															
潮位偏差	A	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
H_0	P_0	W_0^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_1	P_1	0	W_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_2	⋮	0	0	W_2^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
H_{14}	P_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	W_{14}^2	0
H_{15}	P_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	W_{15}^2
H_{16}	P_{16}	W_{16}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_{17}	P_{17}	0	W_{17}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
H_n	P_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	W_n^2

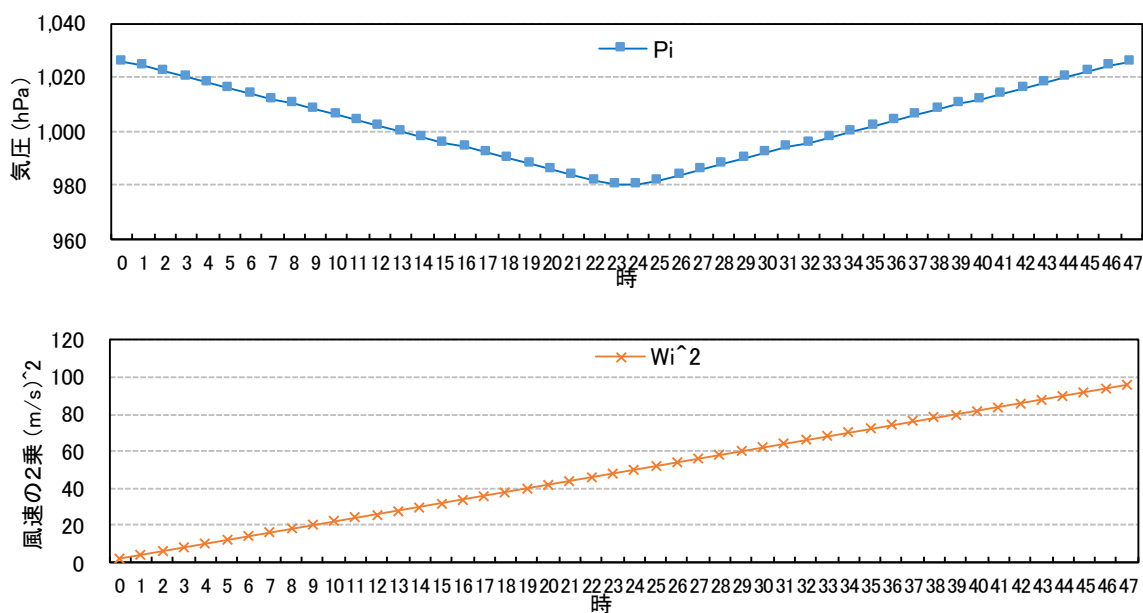
数値例を用いた時計回りの重回帰モデルの重回帰分析

時計回りの重回帰モデルに具体的な数値を代入した場合における重回帰分析を説明する。時系列のデータ数 n は 48 個 (時間 ; $i=0, 1, \dots, 47$) とし, まず, 変数である気圧 P_i と風速の 2 乗 W_i^2 の値を以下のように設定した。ただし, 誤差項を無視した。

- ① 気圧 P_i は, 0 時の 1026hPa から始めて 2hPa ずつ低下し, 23 時と 24 時に最低値 980hPa に達した後, 2hPa ずつ増加し, 47 時に再び 1026hPa となる。
- ② 風速の 2 乗 W_i^2 は, $2(m/s)^2$ から始めて $2(m/s)^2$ ずつ単調増加し, 最終的に $96(m/s)^2$ となる。

これら 2 変数の時系列を図 2 に示した。

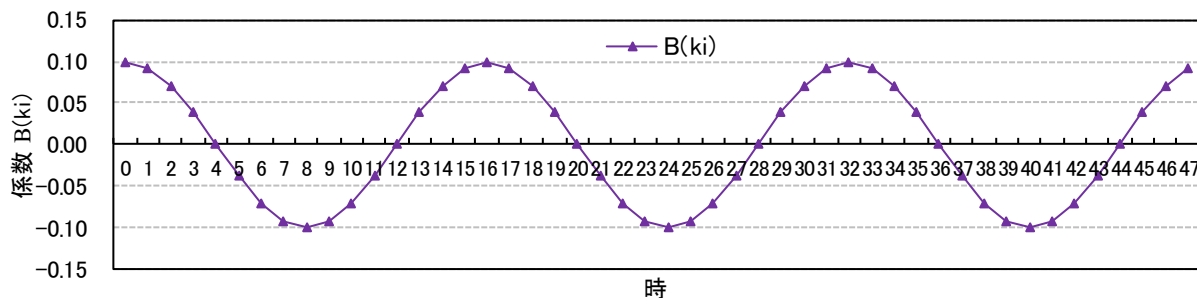
図 2 気圧 P_i と風速の 2 乗 W_i^2 の時系列



次に, 係数と定数項を設定する。係数 A は, 気圧 1hPa の低下により潮位偏差は 1cm 上昇することを参考にして, $A = -1$ とした。定数項 C は, $C = 1010$ とした。係数 $B_{k(i)}$ は, 式 (2) を

参考に、 $B_{k(i)} = b \cos \theta_i$ を当てはめた。そのうち、係数 b は0.1とし、角度 θ_i は0度から始めて時計回りに22.5度ずつ増加するように、 $\cos \theta_i = \cos(22.5 i)$ とした。すなわち、 N から始めて時計回りで3回転(16×3=48)することになる。したがって、係数 $B_{k(i)} = 0.1 \cos(22.5 i)$ で表される。図3に係数 $B_{k(i)}$ の時系列を示した。

図3 係数 $B_{k(i)}$ の時系列



以上まとめると、具体的な数値を用いた時計回りの重回帰モデルの時系列は次式で表される。

$$H_i = (-1) P_i + \{0.1 \cos(22.5 i)\} W_i^2 + 1010 \quad (9)$$

式(9)に対応した重回帰分析の目的変数と説明変数を表3に示した。

例えば、時点 $i=1$ における潮位偏差 H_1 は、次のようになる。

$$\begin{aligned} H_1 &= -1 \times 1026 + \{0.1 \cos(22.5 \times 1)\} \times 4 + 1010 \\ &= -1 \times 1026 + 0.0924 \times 4 + 1010 = -13.63 \end{aligned} \quad (10)$$

表3 具体的な数値を用いた時計回りの重回帰モデルの重回帰分析表

時点 i	目的変数		説明変数																
	潮位偏差 H_i	気圧 A	風速 ²																
			B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	
0	-15.80	1026	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-13.63	1024	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

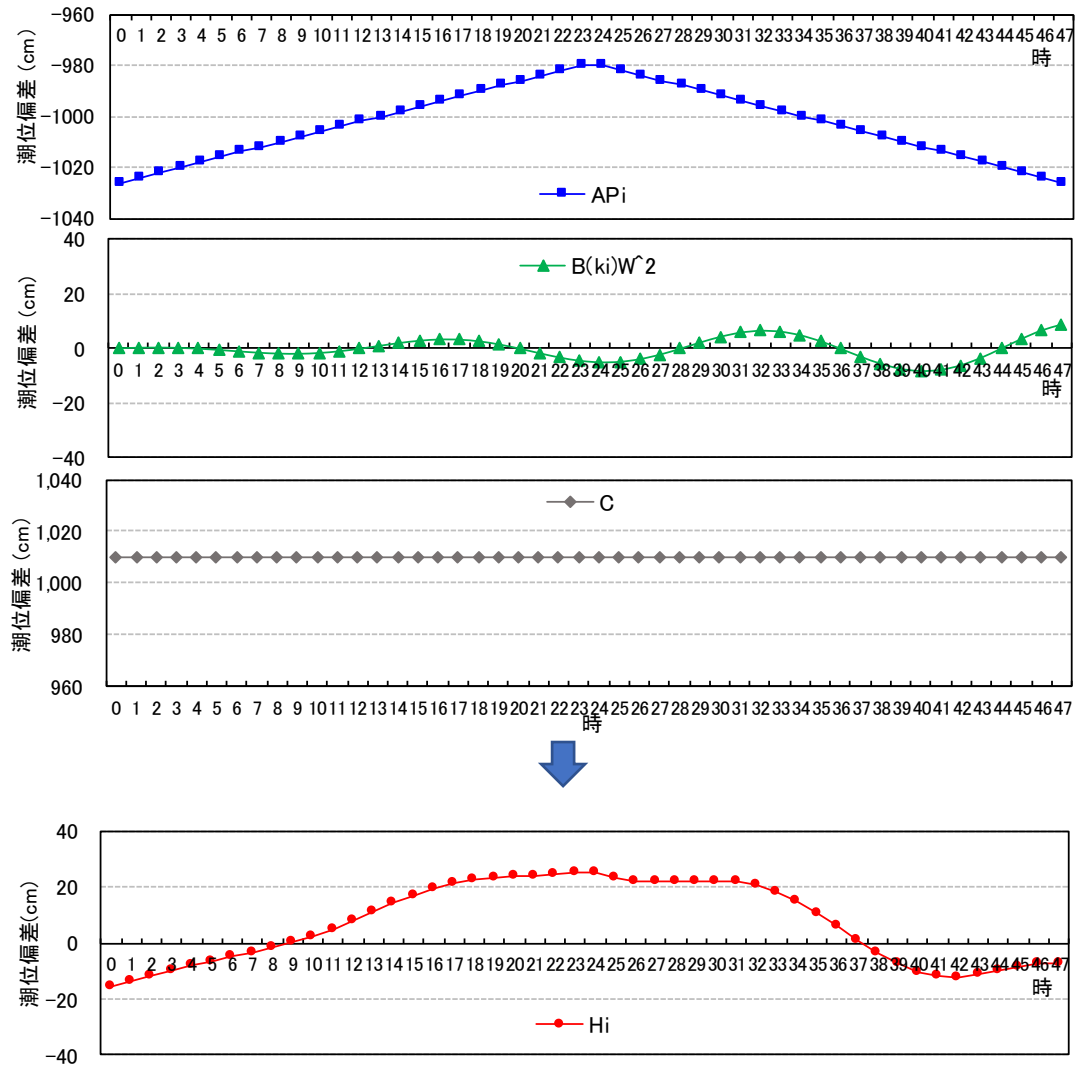
14	14.12	998	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30	0
15	16.96	996	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32
16	19.40	994	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	21.33	992	0	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

22	24.75	982	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
23	25.57	980	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	48
24	25.00	980	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	23.20	982	0	52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

47	-7.13	1026	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96

また、図4には各成分 $\{AP_i, B_{k(i)}W_i^2, C\}$ とそれらの合成値である潮位偏差 H_i の時系列を示した。

図4 各成分($AP_i, B_{k(i)}W_i^2, C$)と潮位偏差 H_i の時系列



成分 AP_i は徐々に上昇し最大に達した後、低下して行き、成分 $B_{k(i)}W_i^2$ は周期的に正負間を徐々に増幅していくコサイン曲線を示す。潮位偏差は、気圧の成分 AP_i に風の成分 $B_{k(i)}W_i^2$ が加わる形で、風の影響が時間とともに増大して行く様子が認められる。

表4に時計回りの重回帰モデルの重回帰分析結果を示した。

表4 時計回りの重回帰モデルの重回帰分析結果

説明変数	A	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
偏回帰係数	-1.000	0.1000	0.0924	0.0707	0.0383	-0.0000	-0.0383	-0.0707	-0.0924
説明変数	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	C
偏回帰係数	-0.1000	-0.0924	-0.0707	-0.0383	0.0000	0.0383	0.0707	0.0924	1010

当然のことだが、各偏回帰係数は式(9)の設定値に一致した。このように、潮位偏差の重回帰モデルは、潮位偏差の予測式に用いることができると考えられた。

なお、次報では、実測データに潮位偏差の重回帰モデルを適用した場合の留意点や課題等について報告する。

参考文献

1. 気象庁；高潮
<http://www.data.jma.go.jp/gmd/kaiyou/db/tide/knowledge/tide/takashio.html>
2. 気象庁；潮位表 平成4年
3. 気象庁の高潮数値予測モデルについて
www.metsoc.jp/tenki/pdf/2011/2011_03_0055.pdf
4. 数値シミュレーションを用いた高潮予測式の係数評価
<http://memoirs.lib-e.yamaguchi-u.ac.jp/642/03.pdf>
5. 気象庁；潮位観測資料
<http://www.data.jma.go.jp/gmd/kaiyou/db/tide/genbo/index.php>
6. 気象庁；過去の気象データ検索
<http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/index.php>
7. 気象庁；潮位観測情報：掲載地点一覧表
<http://www.jma.go.jp/jp/choi/list1.html>