

周期時系列の統計解析

(4) フーリエ変換

nino

2018年2月3日

前報(3.移動平均とフーリエ変換)では、周期時系列の移動平均による周期特性の変化を把握するため、フーリエ変換を簡略的に用いた。今回は、フーリエ変換の結果を解釈する上での留意点や周期成分の推定について、関数モデルを併用して詳細に考察した。

気温時系列とそのフーリエ変換

用いたデータは、前報と同様に、気象台(横浜)の1930年1月から2015年4月までの月平均気温(毎月の1024データ)である。なお、フーリエ変換はExcelの「分析ツール」の「フーリエ解析」を用いた。

気温時系列(図1)は明確な12か月周期を示すほか、数年から十年程度の周期の小さな循環変動や緩やかな上昇トレンドなども認められた。

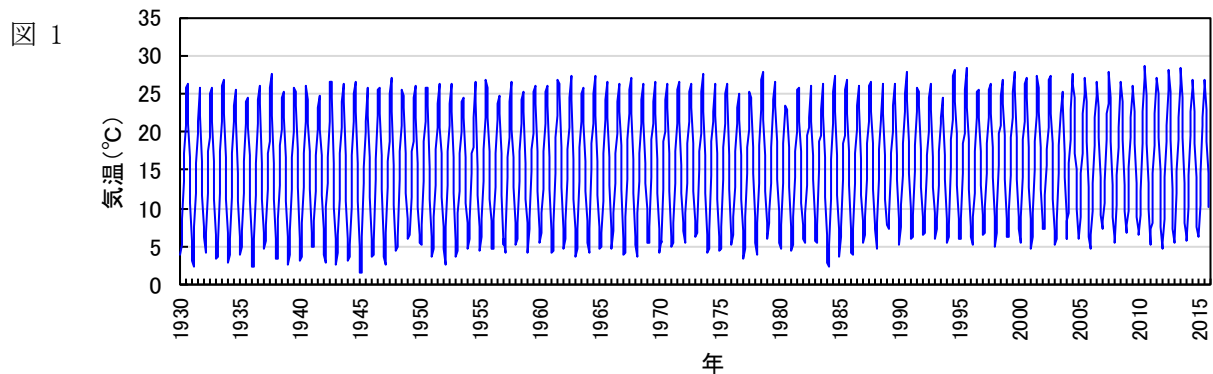


図2に気温時系列のフーリエ変換(FT)の結果を、横軸を周期で示した。

振幅は12.05か月周期の約8.5°Cが最も大きく、やや裾広がりしたピークとして認められ、次いで約6, 4, 3か月周期の振幅が0.2°C以上を示した。また、長周期側でも振幅が0.2°C程度を示す周期が存在した。さらに、全周期範囲で微小ピークが認められ、それは長周期側で大きく、短周期側で小さくなる傾向を示した。

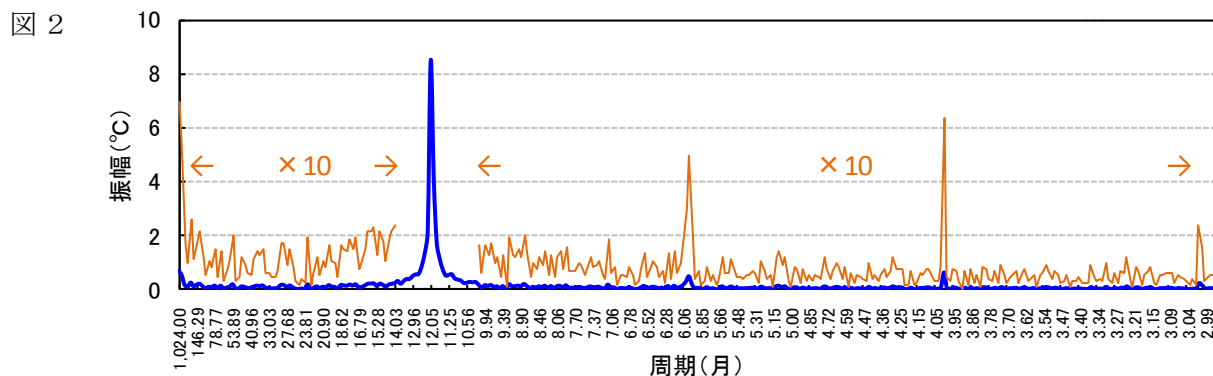


図 2 では横軸を周期 T としたが、通常は横軸を周波数 f とする場合が多い。データ数が 1024 個の時の周波数は $1/1024 \approx 0.000977$ (/月) の倍数 $j/1024$ で等間隔であり、周波数分解能はどの範囲でも等しい。ここで、 $j=0, 1, 2, \dots$ である。しかし、横軸を周期とする場合は、周波数の逆数が周期であるから、周期は $1024/j$ (ただし、 $j \geq 1$) となり、周期間隔は長周期側で大きく、短周期側で小さくなる。このように、FT の周期分解能は周期によって異なるので、検出された周期を解釈するには注意する必要がある。

気温時系列の 12 か月周期のリーケージエラー

表 1 に、図 2 の 12 か月周期近辺における周波数、振幅、周期、周期間隔 (前の周期との差)、および周期と 12 か月周期の差を示した。周波数は約 0.000977 /月の等間隔だが、周期間隔は $0.134 \sim 0.154$ か月の範囲にあった。振幅は 12 か月に最も近い周期である 12.047 か月で最も高い 8.51°C を示し、そこを中心に振幅は低下し裾広がり の状況を示した。これは、周期成分の一部が周囲に漏れ出している (リーケージ) ようになっていることから、リーケージエラーと言われている。正確には、時系列の始点と終点が不連続であることに起因する (参考文献 1)。この例では、解析対象の信号の周波数が周波数分解能の倍数で表せないため、リーケージエラーが発生した。一方、周期と 12 か月周期の差についてみると、それが 0 に近いほど振幅が高かった。この周期差は振幅と密接に関連していると考えられた。

表 1

No.	周波数(/月)	振幅($^\circ\text{C}$)	周期(月)	周期間隔(月)	周期と12の差(月)
83	0.08008	0.87	12.488	0.154	0.488
84	0.08105	1.35	12.337	0.150	0.337
85	0.08203	2.15	12.190	0.147	0.190
86	0.08301	8.51	12.047	0.143	0.047
87	0.08398	4.14	11.907	0.140	-0.093
88	0.08496	1.73	11.770	0.137	-0.230
89	0.08594	1.14	11.636	0.134	-0.364

気温時系列のパラメータの推定

前述したように、気温時系列の FT は、①裾広がり の 12 か月周期成分の振幅、②長周期側から短周期側への振幅の低下傾向、③全周期範囲の微小な振幅、という主として 3 つの要素から成ると考えることができる。

これら 3 つの要素に分けて検討するが、その前準備として、コサイン関数モデルを用いて 12 か月周期成分のパラメータを求めた。その方法は前々報(2. 最小二乗法による近似)にしたがい、気温時系列を時間 t のコサイン関数モデル $f(t)$ で近似し、最小二乗法により $T=12$ か月周期成分のパラメータを推定した (表 2)。なお、 φ rad を月に換算する式は、 $[\varphi \times T / (2\pi)]$ である。

$$f(t) = H \cos(2\pi / T + \varphi) + M + Kt + \varepsilon_t$$

ここで、パラメータは、振幅 ; H , 位相 ; φ , 平均 ; M , トレンド ; K , 誤差 ε_t である。

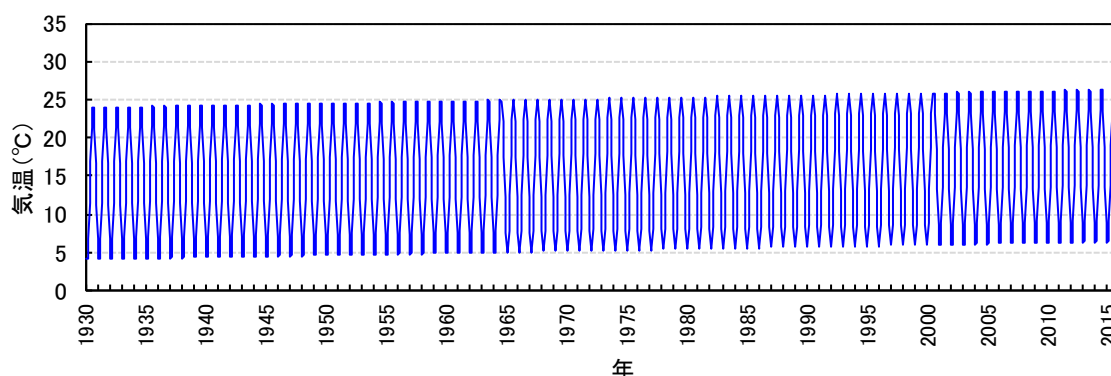
表 2

振幅H(°C)	10.3
平均M(°C)	14.0
位相φ(月)	4.5
トレンドK(°C/月)	0.0023

気温時系列の 12 か月周期成分の振幅は 10.3°C と推定されたが、この値は 12.047 か月周期の振幅 (8.51°C) より約 1.8°C 高かった。これは、気温時系列の 12 か月周期成分の振幅がリーケージエラーにより FT の当該周期では約 83% に低下したためである。

また、これらのパラメータを用いたコサイン関数モデルの時系列を示した (図 3)。これは、微小な長短周期や不規則の変動を除けば気温の時系列と比較的良く一致した。

図 3

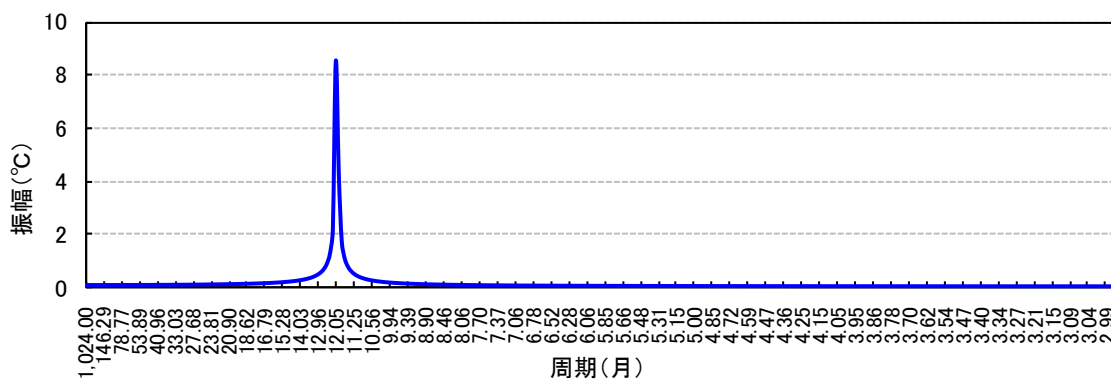


気温時系列のフーリエ変換の各要素

最小二乗法で得られた推定値等を用いて、先の 3 つの要素を個別に検討する。

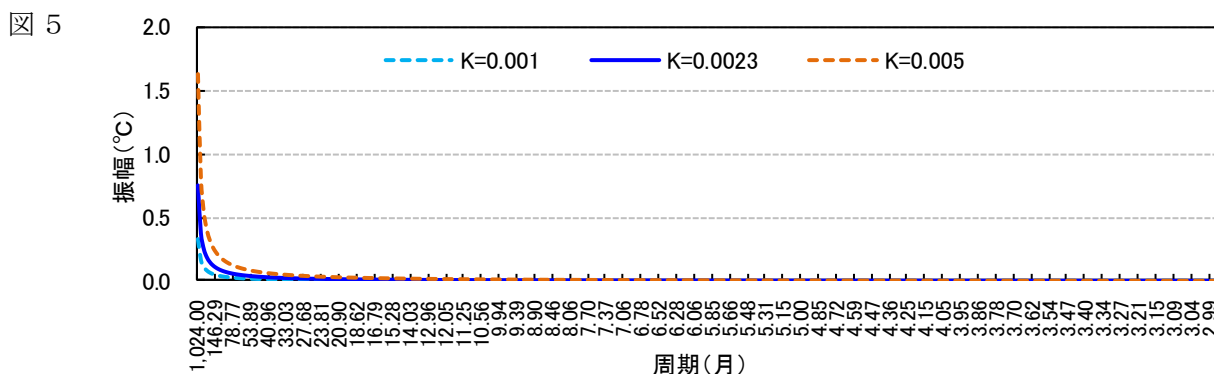
まず、①裾広がり の 12 か月周期成分の振幅については、トレンドの影響を無くするため (後述)、推定値のうちトレンドを除いたコサイン関数モデルの時系列の FT を行った (図 4)。

図 4

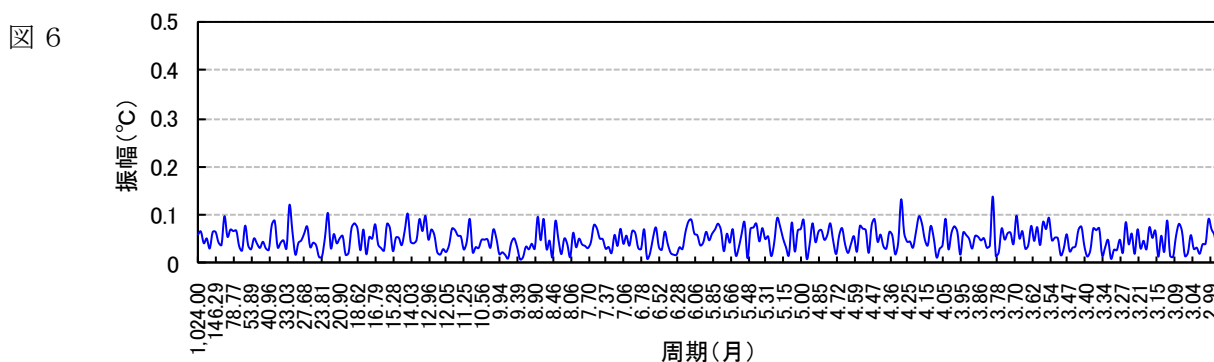


振幅が約 8.5°C を示す 12.05 か月の周期を中心とした裾広がり のピークが認められ、図 2 とほぼ同じピーク形状を示した。

次に、②振幅の長周期側から短周期側への低下の原因として、トレンドが挙げられる。トレンド (直線) はフーリエ級数で表すと、その重み (振幅) は短周期側より長周期側のほうが大きいからである (参考文献 2)。トレンドの推定値 $K=0.0023^{\circ}\text{C}/\text{月}$ を含む 3 通りのモデルについて、トレンドのみの時系列の FT を行った (図 5)。3 モデルとも振幅は長周期側から短周期側に急激に低下した。例えば、トレンド $K=0.0023$ の振幅は、周期が 1024 か月で 0.75°C 程度あるが、12.05 か月では 0.01°C を下回った。

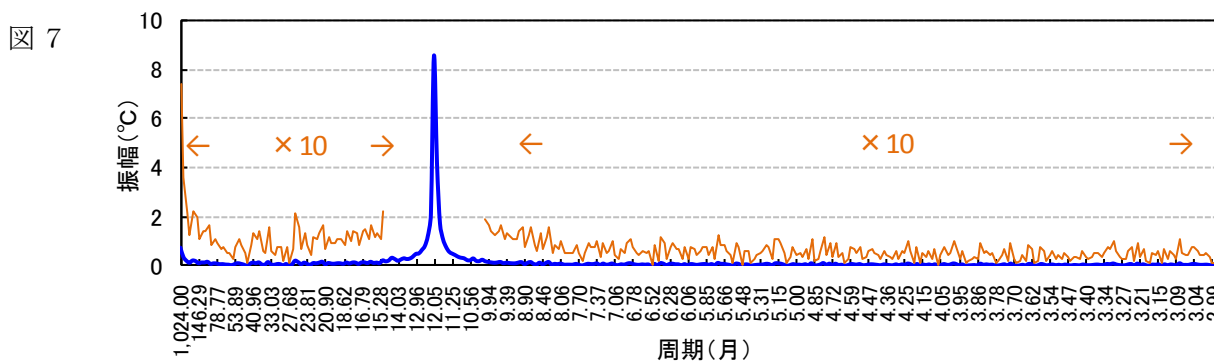


最後に、③全周期範囲の微小な振幅の発生原因の一つとして、不規則変動が挙げられる。不規則変動は様々な周期成分を含むと考えられるからである。不規則変動の振幅の最大値を 10.3°C の 30% (約 3°C) とした乱数 (rnd) の時系列 (rnd=0~ 3°C) の FT を求めた (図 6)。振幅は全周期範囲でほぼランダムに現れ、最大 0.1°C 程度を示した。



これら 3 つの要素 (12 か月周期の振幅 = 10.3°C , トレンド = $0.0023^{\circ}\text{C}/\text{月}$, 不規則変動 = $0\sim 3^{\circ}\text{C}$ の乱数,) を合成したコサイン関数モデルの時系列の FT を求めた (図 7)。

図 7 は気温時系列の FT (図 2) に類似している。したがって、気温時系列の FT は、主としてこれら 3 つの要素から形成されていると考えられた。



リーケージェラーによる振幅の裾広がり形状

裾広がり形状の違いを調べるため、 $T=48, 24, 12$ か月の 3 つの周期成分 (有効数字 2 桁) のコサイン関数モデルの時系列と、それらの周期に最も近い各 FT の周期成分 (有効数字 4 桁: $T=48.76, 23.81, 12.05$ か月) のコサイン関数モデルの時系列について、それぞれ FT を行った (図 8)。なお、振幅は全て 1 に統一した。

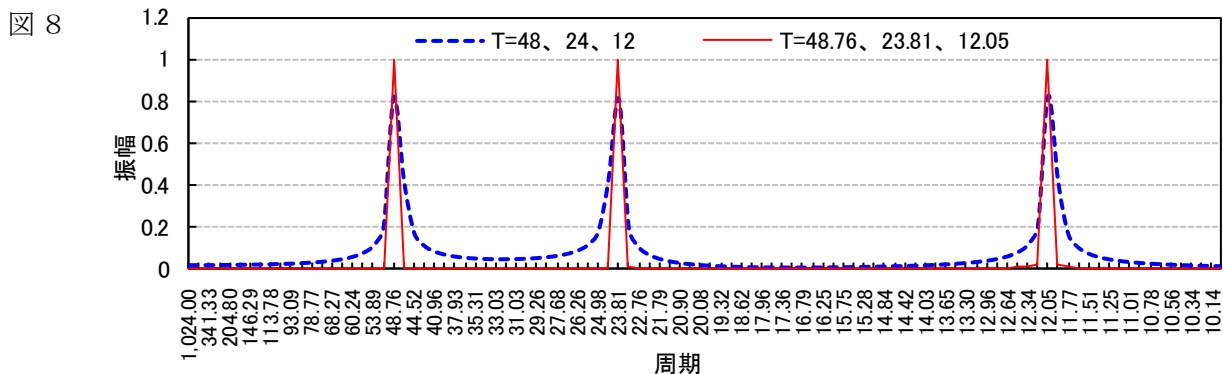
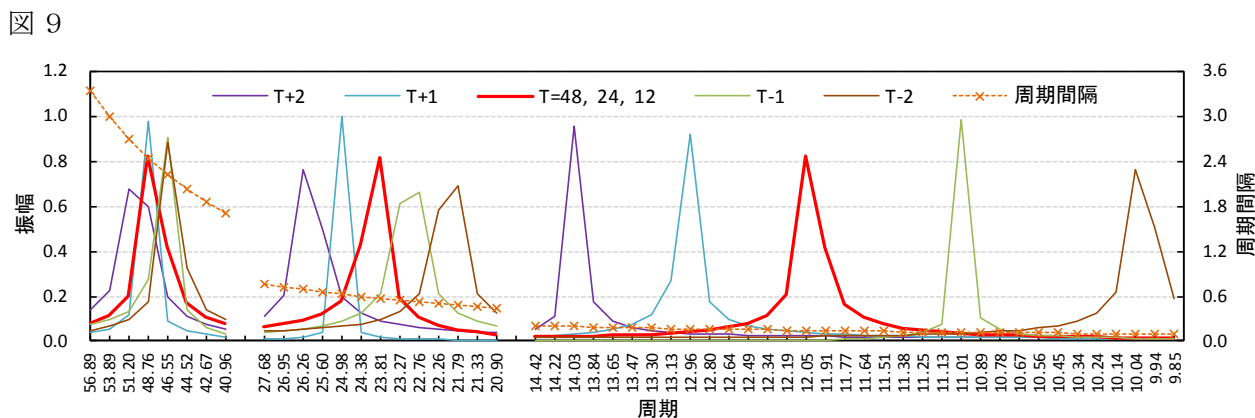


図 8 によると、有効数字 2 桁の場合は、振幅は 3 つの周期成分とも 0.8 程度を示し、裾広がりとなった。その裾広がりの形状は周期成分毎に異なり、右広がりあるいは左広がりであった。一方、有効数字 4 桁の場合は、3 つの周期成分とも振幅が 1.0 の鋭いピーク形を示した。したがって、時系列の周期成分が FT の周期の有効数字 4 桁で表される場合は、リーケージエラーもなく、時系列の振幅がほぼ再現されるといえる。

リーケージエラーによる裾広がりの特徴

リーケージエラーによる裾広がりの特徴を周期範囲別により詳しく調べた。

T=48, 24, 12 か月周期を中心として、それぞれ T+2 から T-2 までの 5 つの周期成分（例えば、T=12 では T+2=14, T+1=13, T=12, T-1=11, T-2=10）の時系列を、それぞれ個別にコサイン関数モデルの時系列を作成し、FT を行った（図 9）。図中には、FT の周期間隔も併せて示した。



まず、周期成分が $T=12 \pm 2$ の場合（右）は、振幅は約 0.7~1 でピーク形状は鋭いものから左右の裾広がりのもので様々であった。振幅がほぼ 1 の鋭い形状を示したのは、 $T-1=11$ の場合の FT の周期 11.01 の時であり、その周期差は 0.01 で他周期の場合に比べて最も小さかった。表 2 でも述べたが、それぞれ周期成分と FT の周期の差が小さいほど振幅が高くなる傾向を示した。また、周期成分 T の FT における周期位置は、FT の振幅が最も高い周期と 2 番目に高い周期の間に存在した。例えば、 $T=12$ についてみると、振幅は FT 周期=12.05 で最高 0.826 を、FT 周期=11.91 で 2 番目 0.414 を示すが、 $T=12$ はそれらの間にある。このことは、後述するが、周期成分 T の正確な探索に有用な情報である。一

方、各周期のピークは比較的良く分離されている。周期間隔が 0.1~0.2 か月程度で 1 か月よりも十分小さいためと考えられた。

次に、周期が $T=24\pm 2$ の場合（中央）は、 $T=12\pm 2$ の場合と同様な傾向を示すが、ピークの裾広がり部分の重なりが認められた。周期間隔は 0.4~0.8 か月の範囲にあった。

最後に、周期が $T=48\pm 2$ の場合（左）は、 $T=48$ と $T+1=49$ のピークおよび $T-1=47$ と $T-2=46$ のピークはともに重なっていた。周期間隔は 1.7~3.3 か月の範囲にあった。周期間隔が 1 か月以上の時にピークの重なりが生じる場合があるので、注意する必要がある。

周期成分の振幅とその FT の振幅の関係

このように、時系列の各周期成分の FT はそれぞれに特徴的なピークパターンを示した。ピークパターンは時系列の周期成分の情報（周期と振幅）を内在しているといえる。このことを利用して、周期成分の振幅とその FT における振幅の関係について検討した。

振幅 1 の周期成分のコサイン関数モデルにおける FT のピークパターンはリーケージエラーにより振幅 1 が FT の各周期に一定の比率で漏出したために形成されたと考えられる。以降、その比率を [周期成分漏出比率] L_i という。したがって、振幅が h の周期成分の FT のピークパターンは [周期成分漏出比率] L_i の h 倍に相当する。周期成分 T の振幅を [周期成分振幅] h 、その FT の各周期の振幅を [FT 周期振幅] y_i 、とすると、次式が成り立つ。ここで、 i は FT の番号であり、 ε_i は誤差である。

$$y_i = hL_i + \varepsilon_i$$

具体例を示そう。表 3 は、気温時系列の 12 か月周期（表 1）について上式を用いてまとめたものである。 L_i は振幅 1 の 12 か月周期成分のモデルから求めた値であり、 h は最小二乗法で得られた $H=10.3^\circ\text{C}$ （表 2）を用いた。

表 3

No.	周期(月)	L_i	hL_i	y_i
83	12.488	0.08	0.86	0.87
84	12.337	0.12	1.23	1.35
85	12.190	0.21	2.14	2.15
86	12.047	0.83	8.53	8.51
87	11.907	0.41	4.25	4.14
88	11.770	0.16	1.70	1.73
89	11.636	0.10	1.06	1.14

表 3 において、 y_i は hL_i とほぼ一致したことから、式が成立していることが確認できる。しかし、表 3 では、周期成分 T は 12 か月、 h は別個に求めた値 (10.3°C) のいずれも既知の値を用いた。本来は両値とも未知であり、推定したい値である。少し手間がかかるが、ピークパターンの最小二乗法を用いてより正確な周期と振幅を推定する方法がある。

ピークパターンの最小二乗法を用いた周期成分の推定

ピークパターンの最小二乗法を用いて周期成分の周期と振幅を求める手順の概要は、まず、周期成分の周期 T を複数予測し、それぞれモデルについて事前に [周期成分漏出比率]

L_i を求めておく．次に，振幅 h をパラメータ（未知数）とした式 hL_i と周期成分の [FT 周期振幅] y_i の差の二乗和 $\sum_i (hL_i - y_i)^2$ が最小となるような h を最小二乗法により推定する．さらに，その最小二乗和がより小さくなる周期成分が存在する可能性がある場合は，その周期について前述の操作を繰り返し，周期 T が有効数字 4 桁（1 つの目安）まで推定できたら終了とし，その時の周期 T と振幅 h を確定値とする．

以下、気温時系列を例に説明する．ただし，データは FT 周期 12.05 か月を中心した前後の 11 データを用いた．気温時系列の FT において，最大振幅の周期（12.05 か月）と 2 番目振幅の周期（11.91 か月）の間にある 3 つの周期成分 T を選択する（例： $T=12.04, 12.00, 11.96$ ）．それぞれの周期成分 T について，最小二乗法により振幅 h を推定した．表 4 に周期成分 $T=12.00$ の場合の計算表を，図 10 に気温と 3 つの周期成分のモデルの FT のピークパターンを示した．

$h = 10.26$

表 4

No.	周期(月)	L_i	hL_i	y_i	$(hL_i - y_i)^2$
81	12.80	0.0526	0.5396	0.5628	0.001
82	12.64	0.0645	0.6619	0.5796	0.007
83	12.49	0.0836	0.8576	0.8729	0.000
84	12.34	0.1190	1.2213	1.3482	0.016
85	12.19	0.2076	2.1304	2.1535	0.001
86	12.05	0.8278	8.4953	8.5078	0.000
87	11.91	0.4127	4.2347	4.1450	0.008
88	11.77	0.1646	1.6888	1.7315	0.002
89	11.64	0.1026	1.0524	1.1361	0.007
90	11.51	0.0744	0.7632	0.7442	0.000
91	11.38	0.0583	0.5979	0.5178	0.006
$\sum ()^2 =$					0.048

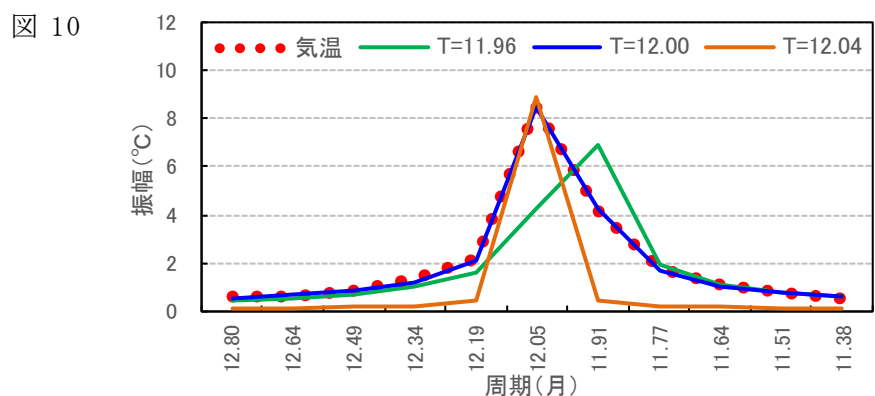


表 4 によると， $T=12.00$ の最小二乗和は 0.048 となり，その時の振幅 h は 10.26℃であった．また，図 10 から，3 つの周期のうち $T=12.00$ のピークパターンが気温のそれと最も当てはまりが良いことが示唆された．

次に， $T=12.00 \pm 0.01$ の周期成分 T について同様に最小二乗法を行った．表 5 には，先の 3 つの周期成分に， $T=12.00 \pm 0.01$ の周期成分を含めた 5 つの周期成分について，最小二乗和 $\sum_i (hL_i - y_i)^2$ と振幅 h の推定値を示した．最小二乗和は $T=12.01$ と $T=11.99$ の間にあ

る $T=12.00$ が最も小さいことから、気温時系列は $T=12.00$ か月周期で、その振幅は 10.26°C と推定された。振幅は時系列のコサイン関数モデルから得られた推定値 10.3°C とほぼ一致した (表 2)。

このように、ピークパターンの最小二乗法を用いた推定法は、より正確な周期と振幅を得ることができると考えられた。また、さらに有効桁数を大きくすることも可能である。しかし、前提条件として、複数の周期が重ならないこと等の注意が必要である。

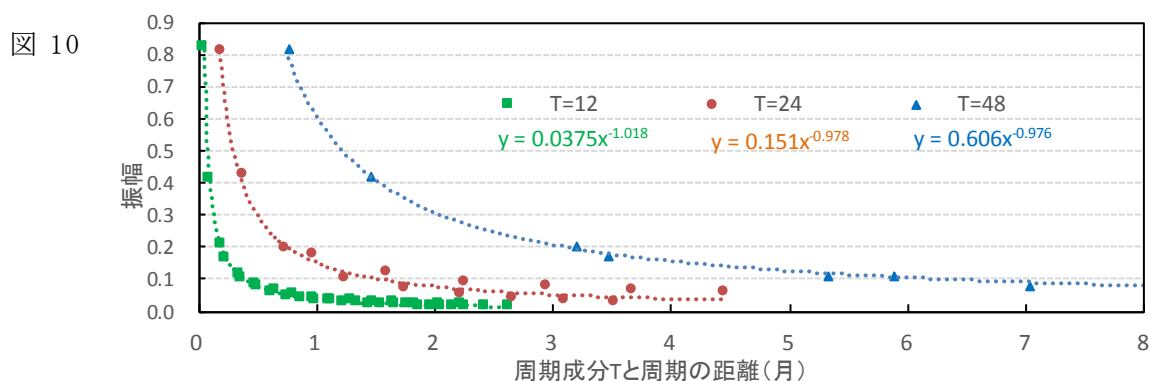
表 5

モデル周期(月)	$\sum (hL_i - y_i)^2$	h
$T=12.04$	22.76	8.93
$T=12.01$	1.94	10.14
$T=12.00$	0.05	10.26
$T=11.99$	1.60	10.20
$T=11.96$	26.43	8.86

振幅と、モデル周期と FT 周期の差の関係

表 1 で、気温の FT の振幅はその FT の周期と 12 か月周期の差と密接に関連していると指摘した。そこで、周期成分 T の FT の振幅と、その FT の周期と周期成分 T の周期の差の関係を、周期成分 $T=48, 24, 12$ か月の 3 例について調べた。図 10 は、FT の振幅 y と、その FT の周期と周期成分 T の周期の差の絶対値 x の散布図であり、それぞれ累乗形式の近似式 $y=ax^{-b}$ も併せて示した。ここで、 a, b は係数である。

a は $0.0375 \sim 0.606$ の範囲にあるが、 b はほぼ 1 で近似できるので、近似式は 3 つの周期とも $y=ax^{-1}$ の形で表された。また、振幅 y とその推定値 ax^{-1} の相関係数は $0.995 \sim 1.000$ となった。したがって、周期成分 T の時系列をフーリエ変換すると、FT の振幅 y はその FT の周期と周期成分の周期 T の差の絶対値 x に反比例して漏出することが示唆された。ただし、 $x \geq a$ が必要条件であり、また、周期 T が 2 の累乗の場合は除外される。



参考文献

1. 装置設計者のための騒音の基礎 第 24 回
<http://www.cradle.co.jp/tec/column07/024.html>
2. 地球惑星科学のための物理数学・同演習 5. フーリエ級数
https://www.sci.hokudai.ac.jp/~minobe/class/phys_math/pdf/5_fourier_series.pdf