周期時系列の統計解析
(3)移動平均とフーリエ変換

nino

2017 年 12 月 18 日

移動平均は，周期時系列における特定の周期成分の消去や不規則変動（ノイズ）の低減に汎用されている統計手法である．ここでは，周期時系列をコサイン関数で近似し，その移動平均により周期成分の振幅がどのように変化するのか等について検討する．また，気温の実測値に移動平均を適用した結果についてフーリエ変換も併用して考察する．

単純移動平均の計算式

移動平均には, 単純移動平均, 加重移動平均, 指数移動平均, 三角移動平均などがあるが, このうち時系列データを一定期間ごとに期間をずらしながら単純に平均をとる単純移動平均を検討対象とした．

周期時系列を $y(t)$とすると, 時点 t から時点 t＋(n-1)までの単純 n 項移動平均(nMA)は, 次式で表され，時点は t＋(n-1)/2 である．

$$\frac{1}{n}\{y(t)+y(t+1)+\cdots+y(t+n-1)\}=\bar{y}\left(t+\frac{n-1}{2}\right)$$

例えば，項数が３の場合における時点 t から始まる移動平均の最初の式は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\{y(t)+y(t+1)+y(t+2)\}&=\bar{y}\left(t+\frac{3-1}{2}\right)\\&=\bar{y}(t+1)\end{aligned}$$

であり，時点は t＋1 で整数となる．以下同様に，２，３・・番目の値の時点は１単位ずつ移動していく．ただし，上式が成り立つのは，移動平均の項数 n が奇数の場合である．

偶数項数，例えば項数が４の場合における時点 t から始まる移動平均の最初の式は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\{y(t)+y(t+1)+y(t+2)+y(t+3)\}&=\bar{y}\left(t+\frac{4-1}{2}\right)\\&=\bar{y}(t+1.5)\end{aligned}$$

であるが，時点は t＋1.5 となり，0.5（半期）ズレている．この半期のズレを解消するため，通常は，中心化移動平均（cMA）を使う．これは，n 項移動平均をとって，再度その２項移動平均をとる方法である．例えば，時点 t から始まる最初の４項移動平均と２番目の４項移動平均の２項移動平均は,

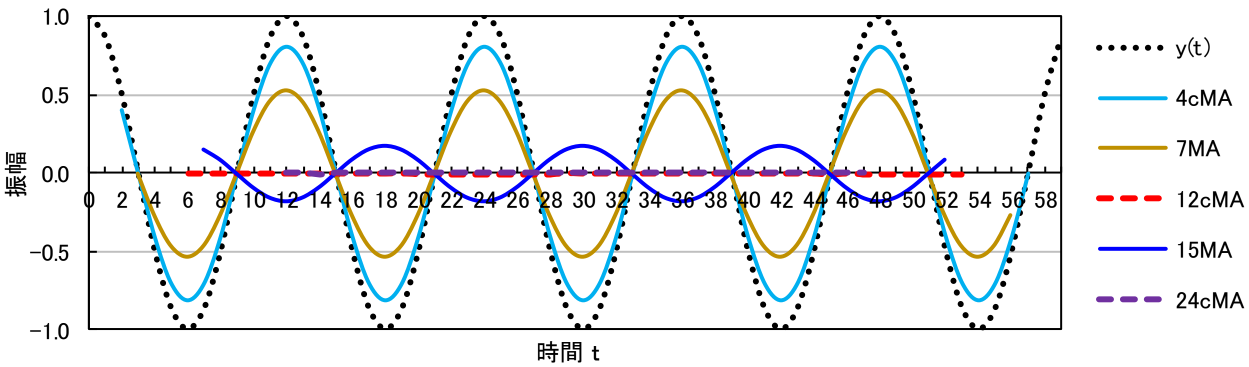
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{[y(t)+y(t+1)+y(t+2)+y(t+3)]+[y(t+1)+y(t+2)+y(t+3)+y(t+4)]}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{y(t)}{2}+y(t+1)+y(t+2)+y(t+3)+\frac{y(t+4)}{2}\right\}$$
$$=\bar{y}\left(t+\frac{5-1}{2}\right)$$
$$=\bar{y}(t+2)$$

であり，時点は $t+2$（整数）となる．同様に，以降の移動平均の時点は 1 単位ずつ移動していく．結局，偶数項数の場合は両端の時点の重みを半分にした加重平均となる．このように，移動平均の計算式は，奇数項数と偶数項数の場合で異なる．

項数による移動平均の振幅変化

実際の周期時系列は，気温の月別変化や季節別(4 半期毎)変化あるいは時間変化等，周期が 12 か月，4 回/年，24 時間など偶数である場合が多いので，主として周期が 12 の場合について検討する．

時系列図には，項数に違いによる移動平均の振幅の変化について例示した．周期時系列として平均 0，振幅 1 および周期 12 のコサイン関数 $y(t)=\cos(2\pi t/12)$ を用い，その 4 項中心化移動平均（4cMA)，7 項移動平均（7MA)，12 項中心化移動平均（12cMA)，15 項移動平均（15MA)，および 24 項中心化移動平均（24cMA）である．



振幅は 4MA，7MA の順に小さくなり，12cMA と 24cMA では振幅は 0 すなわち平滑化されている．しかし，15MA の位相は $y(t)$ の逆位相となっている．このように，コサイン関数をモデルとした周期時系列の移動平均によると，振幅は周期と項数によって変化し，元の関数 $y(t)$ の逆位相となる場合がある．なお，項数が大きいほど，両端の欠測数は多くなる．

コサイン関数の移動平均

周期時系列を次のコサイン関数で近似し，その移動平均を求める．

$$y(t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

ここで，A：振幅，T：周期，t:時間である．
$y(t)$の時点 t から時点 $t+(n-1)$までの n 項移動平均は，次式で表される．

$$\bar{y}(t+\frac{n-1}{2})=\frac{1}{n}\left\{y(t)+y(t+1)+\cdots+y(t+n-1)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}y\left[t+(r-1)\right]$$
$$=\frac{A}{n}\sum_{r=1}^{n}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left\{t+(r-1)\right\}\right]$$

この移動平均の式を項数 n が奇数と偶数の場合に分けて求める．

(1)奇数項数の場合

三角関数を含む有限級数の公式（参考文献１）によると，次式が成り立つ．

$$\sum_{r=1}^{n}\cos\left[x+(r-1)\theta\right]=\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos\left[x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right]$$

この式で，$x=2\pi t/T$，$\theta=2\pi/T$　とおくと，

$$\sum_{r=1}^{n}\cos\left[\frac{2\pi}{T}t+(r-1)\frac{2\pi}{T}\right]=\sum_{r=1}^{n}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left\{t+(r-1)\right\}\right]$$
$$=\frac{\sin(n\pi/T)}{\sin(\pi/T)}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{(n-1)}{2}\right)\right]$$

となる．この式は，式$y(t)=\cos(2\pi t/T)$の時点tから時点$t+(n-1)$までの総和であり，先のｎ項移動平均のΣ内と一致する．
したがって，この式を用いると，$y(t)$の n 項移動平均は次のようにまとめられる．

$$\bar{y}(t+\frac{n-1}{2})=\frac{A}{n}\left(\frac{\sin(n\pi/T)}{\sin(\pi/T)}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{(n-1)}{2}\right)\right]$$
$$=A\left(\frac{\sin(n\pi/T)}{n\sin(\pi/T)}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{(n-1)}{2}\right)\right]$$

時点は$t+(n-1)/2$であり，項数nが奇数のときに整数となる．この式によると，移動平均の振幅は周期Tと項数nによって変化し，元の関数$y(t)$の振幅Aに対する移動平均の振幅の比率（以降，振幅比という）は$\sin(n\pi/T)/n\sin(\pi/T)$となる．周期$T$の成分が消去される条件は，分母の$\sin(\pi/T)>0$であるから，分子の$\sin(n\pi/T)=0$を満たすこと，すなわち$n\pi/T=k\pi$，書き換えると$T=n/k$を満たすことである（$k$は正整数）．したがって，$T=n/k$ において，n項移動平均では，$k=1$とおくと$T=n$の基本周期，$k=2$とおくと$T=n/2$の周期，$k=3$とおくと$T=n/3$の周期・・・などが同時に消去される．

（2）偶数項数の場合

偶数項数の移動平均はn項中心化移動平均，すなわち，時点tから時点t＋（n－1）までと時点t＋1から時点t＋nまでの２つのｎ項移動平均の２項移動平均であるから，

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} y\left(t+[r-1]\right)+\frac{1}{n}\sum_{r=2}^{n+1} y\left(t+[r-1]\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2n}\{y(t)+y(t+1)+\cdots+y(t+n-1)\}+\frac{1}{2n}\{y(t+1)+y(t+2)+\cdots+y(t+n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\{y(t)+y(t+1)+\cdots+y(t+n-1)\}+\frac{1}{2n}\{y(t+n)-y(t)\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} y\left(t+[r-1]\right)+\frac{1}{2n}\{y(t+n)-y(t)\}$$

となる．右辺の第一項は前述した奇数項数の移動平均であり，それに第二項が加わる．第二項は，先の三角関数を含む有限級数の公式の表示形式と和積公式を用いてまとめると，

$$\frac{1}{2n}\{y(t+n)-y(t)\}=\frac{A}{2n}\{\cos(x+n\theta)-\cos x\}$$
$$=\frac{-2A}{2n}\sin\left(\frac{2x+n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{-A}{n}\sin\left(x+\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

となる．これを先のn項中心化移動平均の式に代入し，積和・和積公式を用いてまとめと，

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} y\left(t+[r-1]\right)+\frac{1}{2n}\{y(t+n)-y(t)\}$$
$$=A\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)+\frac{-A}{n}\sin\left(x+\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$
$$=A\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\left\{\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$
$$=A\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\left\{\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{A}{2}\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\left\{\cos\left(x+\frac{(n+1)\theta}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{A}{2}\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\left\{2\cos\left(\frac{2x+n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{2(\theta/2)}{2}\right)\right\}$$
$$=A\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\left\{\cos\left(x+\frac{n\theta}{2}\right)\cos(\theta/2)\right\}$$
$$=A\cos(\theta/2)\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\sin(\theta/2)}\right)\cos\left(x+\frac{n\theta}{2}\right)$$

ここで，$x=2\pi t/T$，$\theta=2\pi/T$　とおくと，

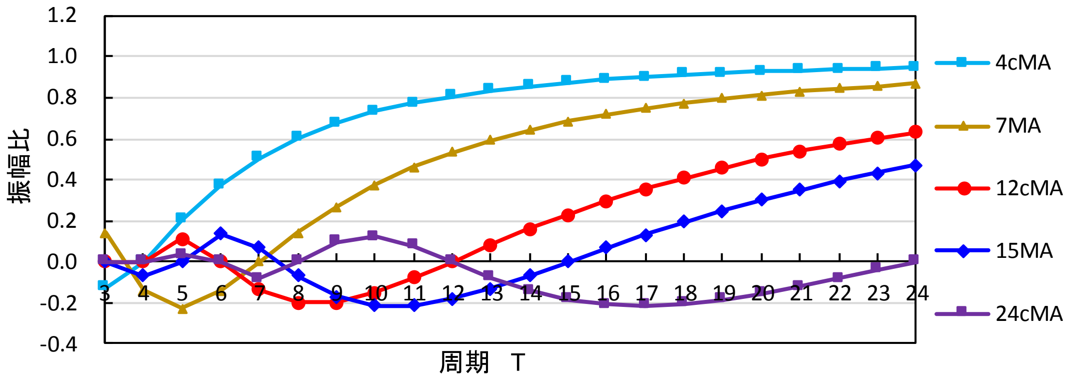
$$\bar{y}(t+\frac{n}{2}) = A\cos(\pi/T)\left(\frac{\sin(n\pi/T)}{n\sin(\pi/T)}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{n}{2}\right)\right] = A\left(\frac{\sin(n\pi/T)}{n\tan(\pi/T)}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{n}{2}\right)\right]$$

が得られる．時点は$t+n/2$であり，項数nが偶数の場合に整数となる．この式によると，偶数項数の振幅比は奇数項数の振幅比の$\cos(\pi/T)$倍に相当する．

周期Tの成分が消去される条件は，分母の$\tan(\pi/T)>0$であるから，分子の$\sin(n\pi/T)=0$を満たすことである．これは，奇数項数の場合と同じであり，$T=n/k$を満たすことである．例えば，12項中心化移動平均の場合は，$k=1$とおくと$T=12/1=12$の基本周期，$k=2$とおくと$T=12/2=6$の周期，$k=3$では$T=12/3=4$の周期，$k=4$では$T=12/4=3$の周期が同時に消去される．

項数と周期による振幅比の変化

これまでの結果から，振幅比は奇数項数の場合は$\sin(n\pi/T)/\ n\sin(\pi/T)$，偶数項数の場合は$\sin(n\pi/T)/\ n\tan(\pi/T)$で表わされた．そこで，$n$項移動平均によって振幅比が周期に対してどのように変化するのかを５例のn項移動平均について調べた．（図）



振幅比は周期が大きくなるにしたがい１に漸近し，その立ち上りは移動平均の項数が小さいほど顕著であった．また，先述したように$T=n/k$を満たす周期で振幅比は0となった．例えば，12cMAでは，$T=12$，6，4，3の４つの周期成分が消去されている．

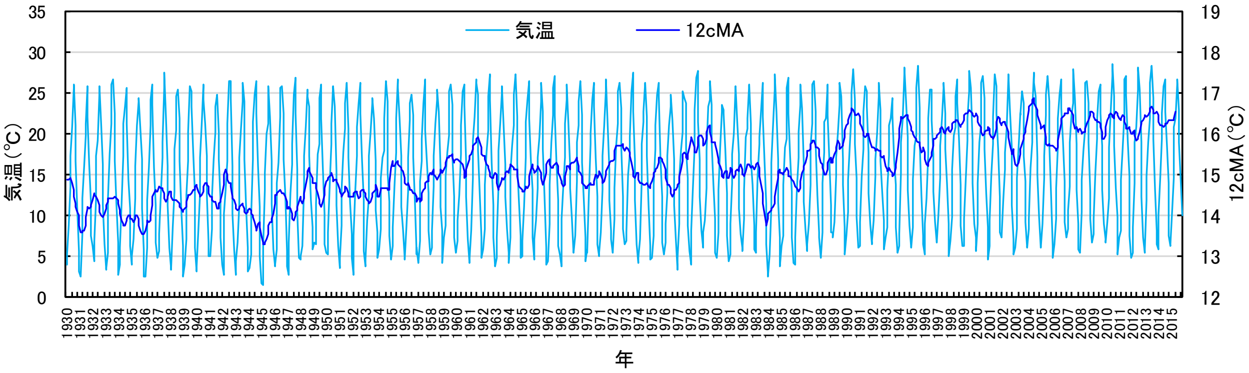
一方，移動平均により振幅比が負となる周期が存在する．振幅比が負ということは，元の関数$y(t)$の逆位相になることである．振幅比が負となる条件は，奇数項数の場合も偶数項数の場合も$\sin(n\pi/T)<0$を満たすことである．$j=1$，2，3，・・とすると，

$$(2j-1)\pi < n\pi/T < 2j\pi \quad \text{すなわち} \quad n/2j < T < n/(2j-1)$$

が満たす条件となる．例えば，12cMA（$n=12$）の場合は，$j=1$とおくと$6<T<12$となり，周期$T=7$，8，9，10，11の５つの周期が逆位相となる．$j=2$とおくと$3<T<4$となり，条件を満たす周期は存在しない．また，逆位相となる周期のほぼ中間の周期は，例えば，12cMAでは$T=7$～11のなかの$T=8$，9の周期の振幅比は0.2程度だが，その前後の周期成分のなかで最も大きかった．周期が12以上においては，周期$T=20$の振幅比は0.50で元の振幅の半分，周期$T=48$の振幅比は0.90，そして，それ以降は振幅比は１に漸近していく．

気温データへの移動平均の適用およびフーリエ変換による検証

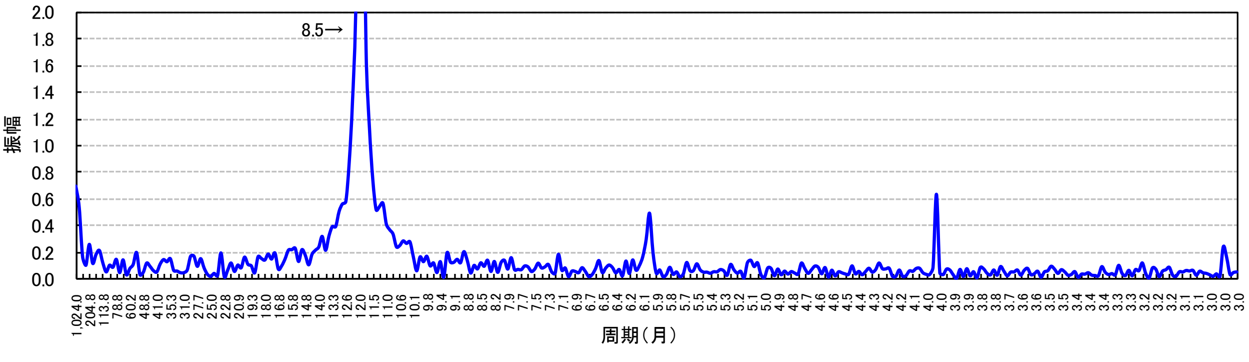
長期間の気温時系列に移動平均を適用し，コサイン関数で得られた結果と比較検討した．用いたデータは，気象台（横浜）の1930年１月から2015年12月まで（86年間）の月平均気温（1032個）である．図に86年間の気温とその12か月中心化移動平均（12cMA）を示す．



気温については12か月の周期が大きいが，年によって高低があり，数年から十年程度の周期の循環変動がみられた．12cMAでは，循環変動が顕著に現れ，それに数か月程度の短周期が重畳している．また，上昇傾向が明確に認められた．

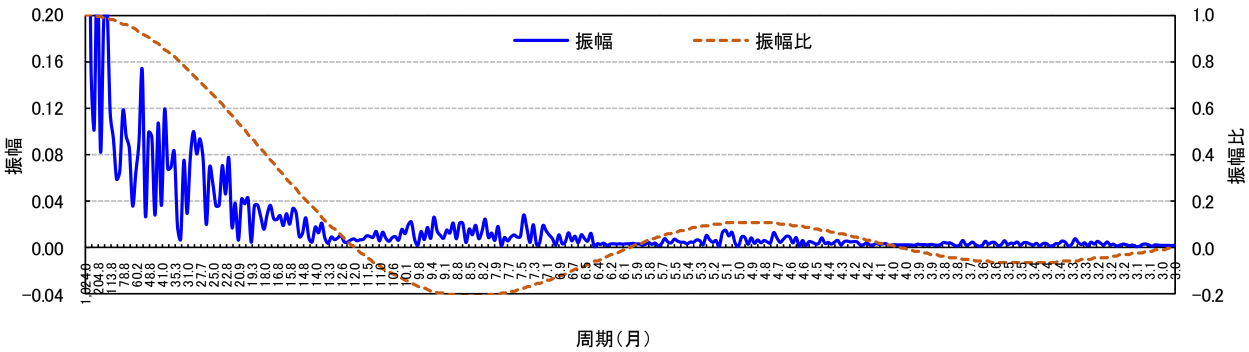
気温と12cMAの時系列の周期特性を調べるため，Excelの「分析ツール」の「フーリエ解析」を用いてフーリエ変換を行った．なお，フーリエ変換ではデータ数を2のn乗個にする必要があるため，最初から2^{10}(＝1024)個のデータを対象にした．

まず，気温のフーリエ変換（図）については，振幅は12か月周期が最も大きく，次いで4，6，3か月周期の順であった．その他の周期も広い範囲で認められ，振幅は短周期側よりも長周期側で大きい傾向を示し，最大で長周期側は約0.2，短周期側は約0.1であった．



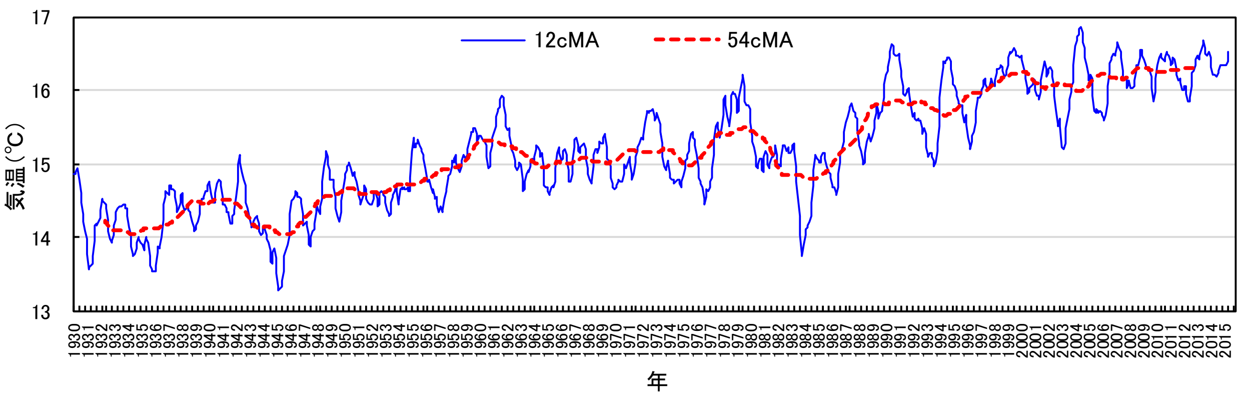
次図には，気温の12cMAのフーリエ変換結果を振幅比の理論曲線と併せて示した．振幅は長周期で大きく，また，12か月や6か月，4か月，3か月の周期はほぼ消去された．この振幅の変化は振幅比の理論曲線と良く対応しており，振幅比が1に近い長周期の振幅は大きく，また，振幅比が0の周期はほぼ消去され，その前後の周期の振幅は小さかった．

例えば，205か月，128か月，53.9か月等の長周期の振幅は0.2前後あった．これは気温時系列の場合とほぼ同じ値であり，それらの振幅比が１弱であることと一致した．また，8か月前後の周期の振幅は0.02程度であった．その時の気温の振幅は約0.1，振幅比は約−0.2であるから，ほぼ予測通りとなった．ただし，振幅比は負なので，逆位相である．



12cMAの時系列をさらに平滑化するため，54か月移動平均（54cMA）を行い，12cMAと比較した（時系列図）．54cMAの周期成分には，12cMAの周期成分と同位相の場合と逆位相の場合が認められた．例えば，1979年前後や1991年前後などは同位相で周期は10年弱（約120か月弱）だが，1995年前後や2001年から2007年の間には逆位相で3か年程度（約36か月）の周期が認められた．また，約3か年程度の周期よりも10年弱の周期のほうが振幅は大きい傾向を示した．

コサイン関数の振幅比の正負を54cMAについて調べてみると，振幅比が正となる周期は4.5年以上と1.6～2.1年などであり，負となる周期は2.4～4.3年などであった．これらの周期は54cMAと12cMAの時系列の位相の違いとほぼ一致した．



12cMAと54cMAの時系列では上昇傾向が認められたことから，単回帰分析によりそれぞれのトレンドを求めた．その結果，両者はわずかに異なるが，有効数字２桁ではともに同じ値（0.0023℃/月）を示し，この86年間で気温は約2.4℃上昇したと推察される．

単純移動平均について検討したが，その中身は必ずしも単純ではない．しかし，中身を熟知しておけば，周期時系列のより正確な評価や予測などが容易となる．なお，本報告では，気温の12か月周期が明確であるため12か月移動平均を行ったが，本来は事前にフーリエ変換して他の周期成分も把握しておくことが望ましい．

参考文献

1）　岩波数学公式２　級数・フーリエ解析，森口ほか，岩波書店(1987)
2）　気象統計学，鈴木栄一，地人書館 (1979).
3）　Excelのﾌｰﾘｴ解析　http://godfoot.world.coocan.jp/fourier-transform.htm