ローラン展開と留数解析―複素解析概論

上野孝司

2017 年 4 月 5 日

概要

ローラン展開と留数解析ー複素解析概論、定積分への応用

１．複素解析初歩

（１）正則な複素関数

高校や大学での初等的な解析学は、まずは実数を対象として議論を展開するが、その後に複素数を対象とした関数にまで拡張する。この分野での複素解析は一般に函数論と呼ばれる一大領域を形成し、留数解析などを用いると実数の解析では求めることが困難な定積分の値を比較的容易に導くことができるなど有用性が高い。本稿では、ローラン展開と留数解析を中心に議論を展開するが、本節ではその前段階として複素解析の初歩について、(1) 正則な複素関数、(2) コーシーの積分定理、(3) コーシーの積分公式（およびテイラー展開）――について簡単に述べる。まず微分可能な複素関数がどのような性質を持つのかを考える。

実数値関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるとは、

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

が存在することを示し、その極限値を $f'(x_0)$ とかくのであった。これはまた以下のようにも書ける。

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon \\ \lim_{x \to x_0} \dfrac{\varepsilon}{x - x_0} = 0 \end{cases}$$

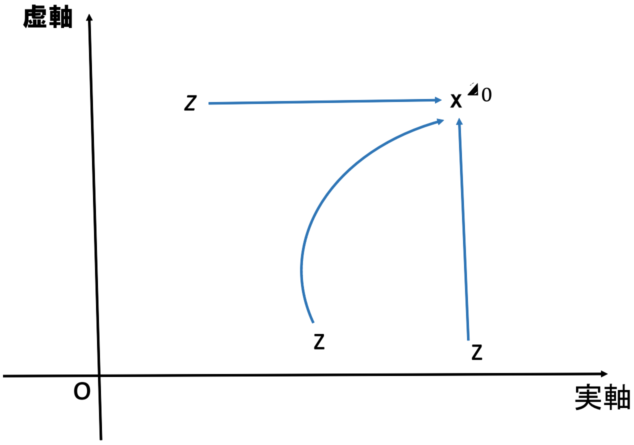
これにならって、複素関数 $f(z)$ が点 z_0 で微分可能とは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在し、その値を $f'(z_0)$ と呼ぶのである。これはまた、

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon$$
$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varepsilon}{z - z_0} = 0$$

が成り立つことを示す。ここで注意すべき点を 2 つあげる。まず、複素関数では、z は複素平面上の点 (x, y) であること。だから実数のときの $x \to x_0$ とは異なり、$z \to z_0$ とは、平面上の点 z_0 に平面上の点 z が近づくということだから、その近づき方には様々な方法が考えられるということである。だから、(a) 実軸に沿って近づく、(b) 虚軸に沿って近づく、(c) 曲線に沿って近づく――などの様々な接近方法があるのである。



次に注意することは、f は複素平面から複素平面への写像ということである。よって f は $(x,y)(x+iy)$ から $(u,v)(u+iv)$ への写像であることである。見方によっては、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像という見方もできる。つまり、f を実数部分と虚部に分けて考えると、

$$\left\{\begin{array}{r}f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)\\ f(x_0,y_0)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\end{array}\right.$$

$f'(x_0,y_0)=a+ib$ とおくと

$$\begin{aligned}u(x,y)+iv(x,y)&=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+(a+ib)\left\{x+iy-(x_0+iy_0)\right\}+\varepsilon\\ &=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+(a+ib)\left\{(x-x_0)+i(y-y_0)\right\}+\varepsilon\\ &=u(x_0,y_0)+a(x-x_0)-b(y-y_0)+\varepsilon_1\\ &+i\left\{v(x_0,y_0)+b(x-x_0)+a(y-y_0)+\varepsilon_2\right\}\end{aligned}$$

よって、

$$\left\{\begin{array}{l}u(x,y)=u(x_0,y_0)+a(x-x_0)-b(y-y_0)+\varepsilon_1\\ v(x,y)=v(x_0,y_0)+b(x-x_0)+a(y-y_0)+\varepsilon_2\end{array}\right.\cdots(1)$$

$\lim_{z\to z_0}\dfrac{\varepsilon_1}{|z-z_0|}=\lim_{z\to z_0}\dfrac{\varepsilon_2}{|z-z_0|}=0$ であるから、(1) は $u(x,y),v(x,y)$ が (x_0,y_0) で微分可能であることを示しており、

$$\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0),\quad -b=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\\ b=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\quad a=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\end{array}\right.$$

となる。よって、

$$\left.\begin{array}{l}a=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ b=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{array}\right\}\cdots(2)$$

(2) をコーシー・リーマンの方程式という。

つまり微分可能性が前提条件とすると、f を (x,y) から (u,v) への写像と考えるとき、$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ は独立に動くのではなく、（２）の条件を満たさなければならない。これは $f(x,y)$ に課されたかなり強い制約条件と言えるのである。

例えば、$f(z)=z^2$

が $z=z_0$ で微分可能であることを示そう。

$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

であるから、$u=x^2-y^2, v=2xy$ であり、

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y, \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y$

であり、

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y$

よって、コーシー・リーマンの方程式を満たす。

次に、複素共役をとる関数 $f(z)=\bar{z}=x-iy$ はどうであろうか？このとき

$u=x,\ v=-y$

であり、

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-1, \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

となるから、コーシー・リーマンの方程式を満たさないので微分可能ではない。

ここで、正則な複素関数を定義しておこう。

【定義】領域 D で定義された関数 $f(z)$ が D の各点で微分可能なとき、f を D 上で正則な関数という。また、関数 $f(z)$ が点 z_0 の 近傍の各点で微分可能 であるとき、$z=z_0$ で正則であるという。"z=z_0 だけで微分可能"であることではないので注意されたい。

（２）コーシーの積分定理

これまで複素関数の微分可能性、正則性について述べてきたが、ここでは複素関数の積分について定義し議論を展開する。

【定義】複素平面の領域 D 上で定義された連続函数 $f(z)$ に対して、D 内の２点 A,B を結ぶ１つの曲線 C をとり、その上での積分として、

$$\int_C f(z)dz=\lim\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z_{i+1}-z_i)\cdots（３）$$

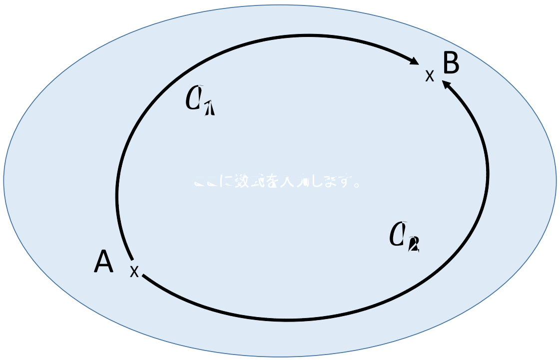
と定義し、A から B までの C に沿う（線）積分という。ここで注意すべきは、実数値函数の定積分

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$(a_0=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$$

であったことに対して、複素積分の場合は、$z_{i+1}-z_i$ はベクトル z_iz_{i+1} を表し、（３）は ベクトル和 としての値の極限となっていることである。

なお、$\int_C f(z)dz$ という表記からもわかるように同じ A から B までの積分としても、経路 C のとり方によって積分が異なる値をとる場合があることにも注意が必要だ。すなわち一般に、



$\int_{C_1} f(z)dz$ と $\int_{C_2} f(z)dz$ は異なるということである。

一般に積分の値は経路によって異なるが、領域 D 内で 正則 な関数は驚くべきことに 道 C のとり方によらず常に一定の値とな
ことが示される。これは次に述べる重要なコーシーの積分定理から直ちに示される。

【定義（コーシーの積分定理）】

$f(z)$ を領域 D で定義される正則な関数とする。C を領域 D 内にある単一閉曲線とするとき

$$\int_C f(z) = 0 \cdot\cdot\cdot (\mathrm{A})$$

が成り立つ。

[証明] ここでは、コーシーが与えたベクトル解析の**グリーンの定理**を用いた簡潔な証明法を述べる。

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), dz = dx + idy$$

とおくと、

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \cdot\cdot\cdot (4)$$

ここで、グリーンの定理を用いると

$$\int_C udx - vdy = \iint_\Omega (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy$$

$$\int_C vdx + udy = \iint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy$$

よって（４）は

$$-\iint_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy \cdot\cdot\cdot (5)$$

ところで、（１）で導いた正則関数におけるコーシー・リーマンの方程式

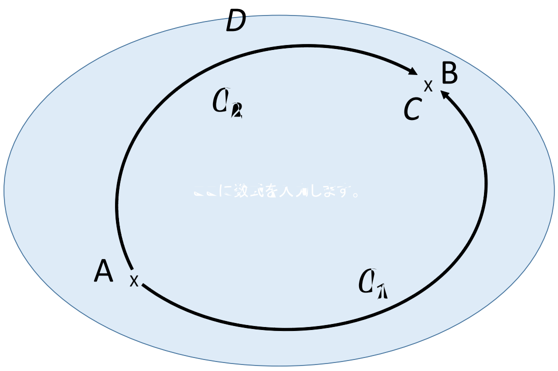
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

から（5）の積分の値は0となる。■

この証明の簡潔さは、“あっ”と驚く美しい証明であり、ベクトル解析のグリーンの定理の威力の一端をみることができよう。コーシーの積分定理の意義は、$f(z)$ の正則可能性、つまり局所的な微分可能性という性質が、積分で単一閉曲線に沿っての積分が0になるという大域的な性質に密接に関係しているということで、これは驚くべきことである。

コーシーの積分定理より領域 D 内では、A から B に沿う曲線 C 上で（線）積分が曲線 C のとり方によらないことが示される。

図に示すように、A、Bを含む単一閉曲線 C を考える。



コーシーの積分定理より、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

ところが、

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 (\text{左回りを正の向きとする}) \\ &= C_1 - C_{2(\text{右回り})} \end{aligned}$$

と表されるから

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_{2(\text{右回り})}} f(z)dz = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_{2(\text{右回り})}} f(z)dz$$

よって、積分路のとり方によらず

$\int_C f(z)dz$ が一定の値になることがわかる。

（3）コーシーの積分公式

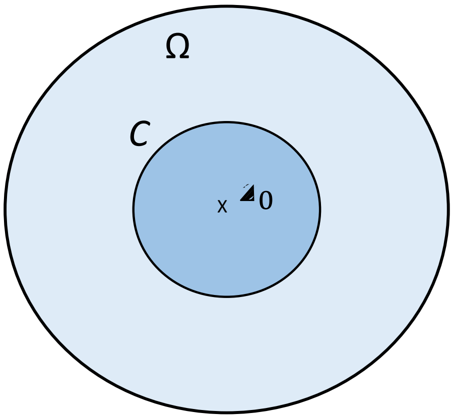
【定理（コーシの積分公式）】

$f(z)$ は領域 Ω 上で微分可能で、C は Ω 内にある単一閉曲線とするとき、z_0 を C 内の一点とすると、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

が成立する。これを**コーシーの積分公式**という。$z=z_0$ での f の値が z_0 とは離れた曲線のうえでの積分の値によって決まってしまうという、ちょっと信じがたい定理である。

[証明] これは以下のように簡単に示すことができる。C として半径 a の値をとる。



$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \int_C \frac{f(z_0)+f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta$$
$$= f(z_0)\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \int_C \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta$$

上の式の第 1 項の積分 $\displaystyle\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$ は $2\pi i$ であるから

$$= 2\pi i f(z_0) + \int_C \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta \quad \cdot\cdot\cdot(6)$$

と変形でき、第 2 項は以下のように 0 となる。

$\varepsilon > 0$ を任意にとると、その被積分関数は $f(z)$ の連続性から、半径 a を十分に小さくすれば

$|f(\zeta)-f(z_0)| < \varepsilon(\zeta \in C)$ とできるから、

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|f(\zeta)-f(z_0)|}{a} < \frac{\varepsilon}{a}$$

よって、

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{a}\int_C |d\zeta| = \frac{\varepsilon}{a}\cdot 2\pi a = 2\pi\varepsilon$$

ε は任意の正数だから、(6) の第 2 項＝0 となる。よって

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = 2\pi i f(z_0)$$

ゆえに、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$$

を得る。なお、$\displaystyle\int_C |d\zeta|$ は曲線 C の長さを表し、$2\pi a$ となる。これで積分公式が示された。■

次に、この積分公式を用いて、微分可能な関数の整級数展開（テイラー展開）を示す。

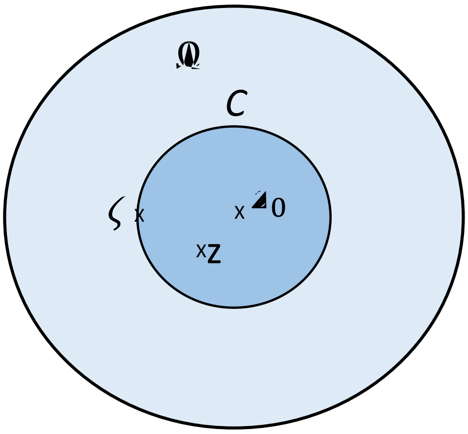
$f(z)$ を領域 Ω で微分可能な関数とする。今、Ω 内の一点 z_0 を中心とする円を C とするときとき、C 内で $f(z)$ は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

と展開できる。このとき結論を先に述べると

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。



$\left| \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ となるので

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left\{ 1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right\}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\cdots \right\}$$

これをコーシーの積分公式

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

に代入すると

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z_0} \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\cdots \right\} \right\} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}(z - z_0) + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}(z - z_0)^2 + \cdots\cdots \right\} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3} d\zeta \cdot (z - z_0)^2 + \cdots\cdots \\
&= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が示された。ここで、上記の無限級数は項別積分してよいことを使った。

また、
$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
の両辺を次々に微分して、$z=z_0$ とおくと

$$f^{(n)}(z_0)=n!a_n=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta(n=0,1,2,\cdots)$$

が得られた。これは積分公式を一般化したものといえる。■

２．ローラン展開

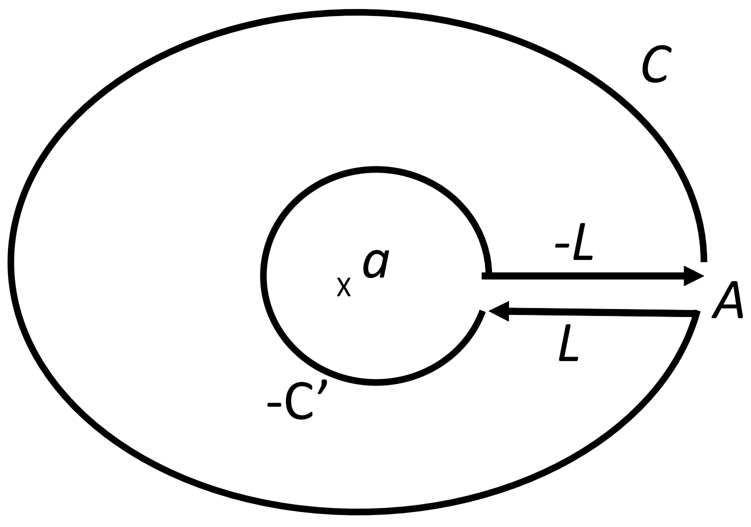
複素関数 $f(z)$ が z_0 を除いて z_0 の近傍で正則であって、z_0 で正則でないとき、z_0 を孤立特異点という。そしてその特異性が $(z-z_0)$ を $f(z)$ にかけて消えてしまうとき、z_0 を１位の極という。同様に $(z-z_0)^n$ をかけてはじめて正則になるとき、z_0 を n 位の極という。つまり、

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$$

が存在するとき、n 位の極という。

$f(z)$ が $z=a$ で孤立特異点で、$z=a$ の近傍で正則であるとき、z_0 でテイラー展開できないが、$z=a$ のまわりで、**ローラン展開**と呼ばれる級数展開ができることが知られている。以下、このローラン展開を示そう。

いま、$z=a$ を $f(z)$ の特異点として、a のまわりで２つの円周 C,C' を考え図のように、
$A\to C\to L\to -C'\to -L\to A$
という円環領域を囲む道をとる。



この円環領域で $f(z)$ は正則だから、コーシーの積分公式を用いることができ、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{-C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{-L} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right\}$$ （L と $-L$ の積分の計算は打ち消しあう）・・・（A）

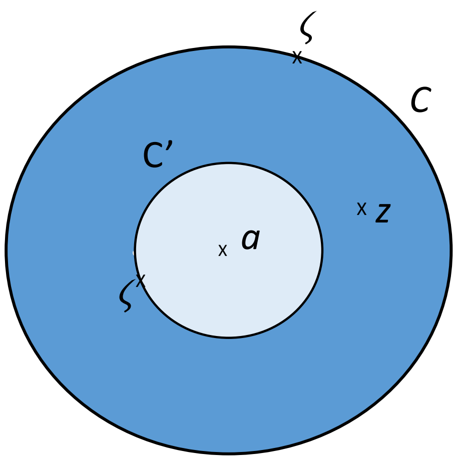
ここで

(1) ζ が C 上を動くとき

$| \ z-a| < |\zeta - a|$

(2) ζ が C' 上を動くとき

$| \ z-a| > |\zeta - a|$



したがって

$(a)\zeta$ が C 上を動くとき、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z-a)}$$
$$= \frac{1}{(\zeta - a)\left\{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right\}}$$
$$= \frac{1}{\zeta - a}\left\{1 + (\frac{z-a}{\zeta - a}) + (\frac{z-a}{\zeta - a})^2 + \cdots\cdots\right\}$$

$(b)\zeta$ が C' 上を動くとき、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z-a)} = \frac{1}{(z-a)\left\{\dfrac{\zeta - a}{z-a} - 1\right\}}$$
$$= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{-1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}}$$
$$= \frac{-1}{z-a}\left\{1 + \frac{\zeta - a}{z-a} + (\frac{\zeta - a}{z-a})^2 + \right\}$$

この結果を（A）に代入すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta - a)^3} + \cdots\cdots\right\}d\zeta$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\zeta)\left\{\frac{1}{z-a} + \frac{\zeta - a}{(z-a)^2} + \frac{(\zeta - a)^2}{(z-a)^3} + \cdots\cdots\right\}d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}d\zeta \cdot (z-a) + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\zeta)d\zeta \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)d\zeta \cdot \frac{1}{(z-a)^2} \cdot \cdot \cdot \text{(B)}$$

（B）式で右辺の $(z-a)^n$ の係数に着目すると

$$f(z)=\cdots\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+$$
$$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots \qquad ・・・（C）$$

ここで、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta(n=0,1,2,\cdots)$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta(n=1,2,\cdots)$$

ここで、コーシーの積分定理により、
$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$
よって、a_n,a_{-n} を一括して書くことができ、

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta(n=0,1,2,\cdots)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$f(z)$ を孤立特異点のまわりで、（C）のように表すことを $f(z)$ を a のまわりでローラン展開するという。

次に留数解析の準備のために点 a を中心として半径 r の円 C の周の正の向きに関する積分
$\displaystyle\int_C(z-a)^n dz$ を考える。
（＊）$n=0,1,2,\cdots$ のときは、コーシーの積分定理より、０となる。
（＊）$n=-1$ のときは、$z-a=re^{i\theta}$ とおくと、$dz=rie^{i\theta}d\theta$ であるから
$\displaystyle\int_C\frac{1}{z-a}dz=\int_C\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$
（＊）$n=2,3,4,\cdots$ のときは、$dz=rie^{i\theta}$

$$\int_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{-n}rie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}r^{-n+1}e^{-i(n-1)\theta}d\theta$$
$$=-r^{-n+1}\left[\frac{1}{n-1}e^{-i(n-1)\theta}\right]_0^{2\pi}$$
$$=0$$

よって、

$$\int_C(z-a)^n dz=\begin{cases}2\pi i\ (n=-1)\\ 0(n\neq-1)\end{cases}\quad (C\text{ は }a\text{ を中心にして半径 }r\text{ の円周})・・・（D）$$

が成り立つ。

３．留数定理

a を $f(z)$ の孤立特異点とする。a を中心とする $f(z)$ のローラン展開

$$f(z)=\cdots\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+$$
$$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots \qquad ・・・（E）$$

（E）は項別積分できることが知られており、（E）の両辺を $C(a$ を中心とした円周）に沿って積分する。
（D）から $n \neq -1$ 以外の積分は 0 となることから

$$\int_C f(z) = 2\pi i a_{-1} \cdot\cdot\cdot \text{（G）}$$

つまり、孤立特異点を持つ f の積分の値が $a_{-1}(\frac{1}{z-a}$ の係数）と深く結び付いていることがわかる。
この a_{-1} は以下の解析で重要な役割を果たすことから以下のように定義する。
【定義】a_{-1} を孤立特異点 a における $f(z)$ の留数（$residue$）といい、$R(a,f)$ とか $\mathrm{Re}\, s(a,f)$ で表す。
（G）より、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

が成り立つ。
以下はこの留数を求めるのに役立つ重要な定理である。
【定理１】孤立特異点 a が $f(z)$ の n 位の極のとき

$$\mathrm{Re}\, s(a,f) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}z}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)$$

特に a が 1 位の極のとき

$$a_{-1} = \mathrm{Re}\, s(a,f) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

（証明）f はローラン展開によって、

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} +$$
$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

したがって、
$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$
上式を $(n-1)$ 回微分すると
$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\} = (n-1)!a_{-1} + n!(z-a) + \cdots$
したがって

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = a_{-1} = \mathrm{Re}\, s(a,f)$$

特に a が 1 位の極のときは

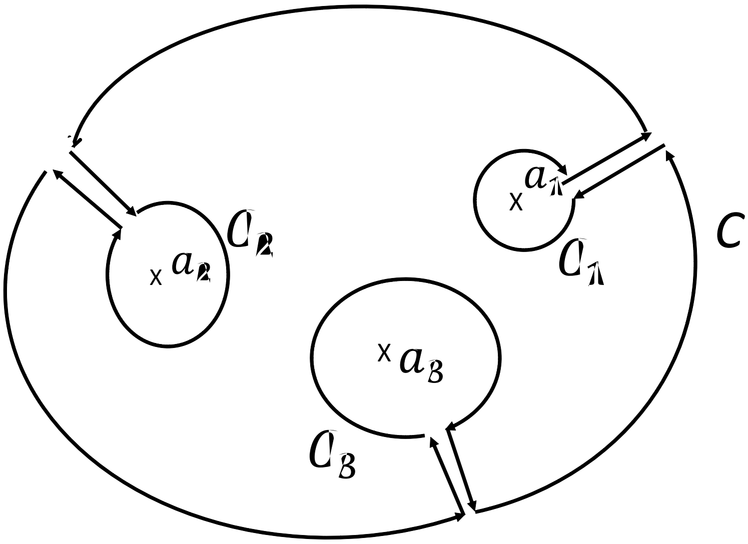
$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = a_{-1} = \mathrm{Re}\, s(a,f)$$

系：特に , $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ で、$Q(z)$ が点 a で一次の零点のとき
$Q(a) = 0, Q'(a) \neq 0$ のとき
$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$

【留数定理】 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ は $f(z)$ の孤立特異点とする。$a_1, a_2, \cdots, a_k$ を内部に含む単一閉曲線 C をとる。このとき、この C を正の向きに $f(z)$ を積分すると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z) = \mathrm{Re}\, s(a_1, f) + \mathrm{Re}\, s(a_2, f) + \cdots \mathrm{Re}\, s(a_k, f) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}\, s(a_i, f)$$

（証明）いま、$a_1, a_2, \cdots, a_k$ のまわりに正の向きにまわる円周 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ をとる。図のように C と順次 C_k を結んだ線径路を考えると、図で影のつぃた部分を囲む道が出来上がる。



この部分で $f(z)$ は正則であるから、コーシーの積分定理を用いると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz - \cdots\cdots - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_k} f(z)dz = 0 \\ \mathrm{Re}\, s(a_i, f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_i} f(z)dz \end{cases}$$

であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}\, s(a_i, f)$$

を得る。■

４．定積分の計算

留数定理と定理１（およびその系）を用いると、実数の解析では難しい（不定積分を求めることが困難な）定積分の値を求めることができる。

［**例１**］

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin\pi/2n}$$

この場合には、有理関数 $R(z)=\dfrac{1}{1+z^{2n}}$ を考える。
$z^{2n}+1=0$ の根が $R(z)$ の１位の極である。
$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと
$(\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$
よって、$2n\theta=\pi+2k\pi\rightarrow\theta=\dfrac{2k+1}{2n}\pi(k=0,1,\cdots,2n-1)$
より、$2n$ 個の根は

$$z_0=\cos\pi/2n+i\sin\pi/2n$$

とおくとき

$$z_k=z_0^{2k+1}(k=0,1,\cdots 2n-1)$$

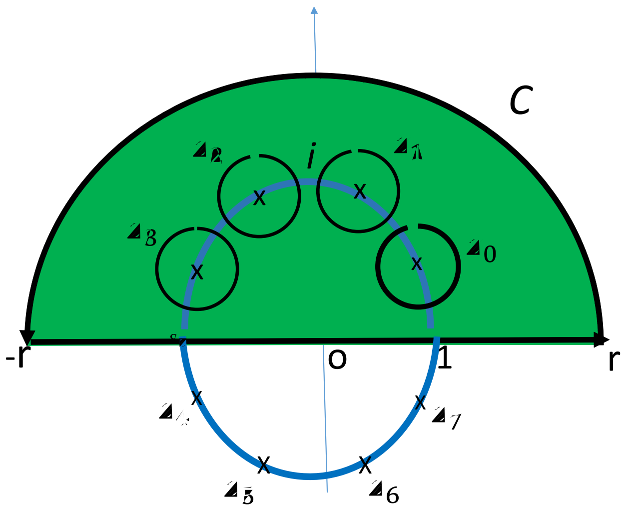
と書ける。

$z_k=(\cos\pi/2n+i\sin\pi/2n)^{2k+1}=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}+i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$
よって、複素平面の上半球にある根の偏角は、
$0<\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}<\pi\rightarrow 2k+1<2n,$ すなわち、$k<n-\dfrac{1}{2}$
k は正の整数であるから、$0\leqq k\leqq n-1$ である。よって上半球にある極は、
$z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}$ の n 個であり、いずれも１位である。すると
$\displaystyle\int_{-r}^{r}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_C\frac{dz}{1+z^{2n}}=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\,s(z_k,R)$(留数定理)
ここで $r\rightarrow\infty$ とすると、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\lim_{r\rightarrow\infty}\int_C\frac{dz}{1+z^{2n}}=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\,s(z_k,R)$

ここで、$\displaystyle\lim_{r\rightarrow\infty}\int_C\frac{dz}{1+z^{2n}}=0$ となることがわかるので（後述)、
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\,s(z_k,R)$
ここで、$\displaystyle\mathrm{Re}\,s(z_k,\frac{1}{1+z^{2n}})=\frac{1}{\left.\frac{d}{dz}[1+z^{2n}]\right|_{z=z_k}}=\frac{1}{2nz_k^{2n-1}}$(定理１の系)
$z_k^{2n-1}=\dfrac{z^{2k}}{z_k}=\dfrac{-1}{z_k}$ であるから
$\mathrm{Re}\,s(z_k,\dfrac{1}{1+z^{2n}})=\dfrac{-z_k}{2n}$
これは、$k=0,1,2,\cdots,n-1$ に対して成立するから

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}&=2\pi i(-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}z_k)\\&=-\frac{2\pi i}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}z_0^{2k+1}\end{aligned}$$



上半球の円弧と実軸に沿った積分を考える。
その中に4つの解（孤立特異点）が含まれる

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{z_0(1-z_0^{2n})}{1-z_0^2} \\
&= -\frac{\pi i}{n} \cdot \frac{1-(-1)}{\frac{1}{z_0}-z_0} \\
&= \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{z_0 - \dfrac{1}{z_0}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_0 - \frac{1}{z_0} &= (\cos\pi/2n + i\sin\pi/2\pi) - (\cos\pi/2\pi - i\sin\pi/2n) \\
&= 2i\sin\pi/2n \quad \text{であるから}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{z_0 - \dfrac{1}{z_0}} &= \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{2i\sin\pi/2n} \\
&= \frac{\pi}{n\sin\pi/2n} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

［例２］ $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n\sin(\dfrac{m\pi}{n})} (0 < m < n, m.n \text{ は整数})$$

$R(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ とおく。

頂角 $\beta = \dfrac{2\pi}{n}$ の扇形の周上で、$R(z)$ を積分すればよい。

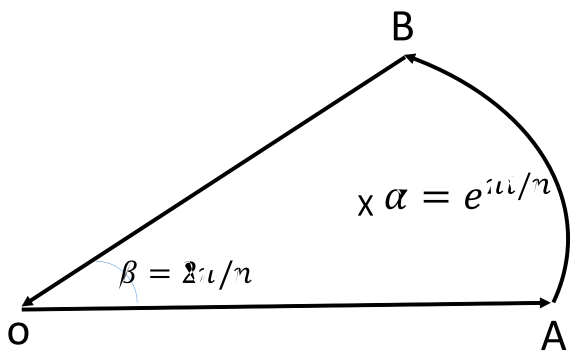
$$\int_\Delta \frac{z^{m-1}}{1+z^n}dz = \int_0^a \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx + \int_{AB} R(z)dz + \int_{BO} R(z)dz$$

$$\int_{AB} \mathfrak{R}(\mathfrak{z})\mathfrak{d}\mathfrak{z} = \mathbf{0}(\text{後述})$$

BO 上では、$z = re^{i\beta}(0 \leqq r \leqq a)$、$z^n = r^n(n\beta = 2\pi)$ だから

$$\int_{BO} R(z)dz = \int_a^0 \frac{r^{m-1}e^{i\beta(m-1)}}{1+r^n e^{i\beta n}} \cdot e^{i\beta}dr (dz = e^{i\beta}dr \text{ に置換積分})$$

$$= -\int_0^a \frac{r^{m-1}e^{i\beta m}}{1+r^n}dr$$
$$= -\exp(\frac{2m\pi i}{n}) \times I$$



また、この扇形に含まれる R の極は、$\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$ のみであるから

$$\mathrm{Re}\, s(e^{\frac{i\pi}{n}}, R) = \left[\frac{z^{m-1}}{\frac{d}{dz}(1+z^n)}\right]_{z=\alpha} = \left[\frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{n}\alpha^{m-n}$$

$$= \frac{1}{n}e^{\frac{i\pi}{n}}(m-n) = \frac{1}{n}e^{\frac{m\pi i}{n}} \cdot e^{-i\pi} = -\frac{1}{n}e^{\frac{m\pi i}{n}}$$ (定理１の系)

$$\int_\Delta R(z)dz = I - \exp\frac{2m\pi i}{n}I = 2\pi i(-\frac{1}{n}e^{\frac{m\pi i}{n}})$$ (留数定理)

$$(1-\exp\frac{2m\pi i}{n})I = -\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{m\pi i}{n}}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{\exp\frac{m\pi i}{n}}{\exp\frac{2m\pi i}{n} - 1} = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{\exp\frac{m\pi i}{n} - \exp(-\frac{m\pi i}{n})}$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{\cos\frac{m\pi}{n} + i\sin\frac{m\pi}{n} - \left\{\cos(-\frac{m\pi}{n}) + i\sin(-\frac{m\pi}{n})\right\}}$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{2i \sin \dfrac{m\pi}{n}}$$
$$= \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin m\pi/n}$$

（∗）$\displaystyle\int_{AB} R(z) = 0$ の証明

$R(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$

$\lim_{|z|\to\infty} zR(z) = \lim_{|z|\to\infty} \dfrac{z^m}{1+z^n} = \lim_{|z|\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{z^m} + z^{n-m}} \to 0 (n > m)$

円弧 $A(\rho)$ 上の｜ $R(z)|$ の最大値を $M(\rho)$ とする。

｜ $\displaystyle\int_{A(\rho)} R(z)dz| \leqq M(\rho)\rho(\beta - \alpha)$

$\lim_{\rho\to\infty} \rho M(\rho) = 0$ だから、

$\lim_{\rho\to\infty} \displaystyle\int_{A(\rho)} R(z)dz = 0$■

ところで、例 2 から Γ 関数の相補公式が示される。

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} (x \in \mathbb{R} - (-\mathbb{N}))$$

以下、これを示そう。$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ で、$\dfrac{1}{1+x^n} = u$ とおくと

$I = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1} (1-u)^{-\frac{m}{n}} du$・・・（∗）

と変形できるから、ベータ関数と Γ 関数の関係

$B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

を用いると

$I = \dfrac{1}{n} B(\dfrac{m}{n}, 1 - \dfrac{m}{n}) = \dfrac{1}{n} \Gamma(\dfrac{m}{n}) \Gamma(1 - \dfrac{m}{n})$

が成り立つから例 2 の結果より、

$\Gamma(\dfrac{m}{n}) \Gamma(1 - \dfrac{m}{n}) = \dfrac{\pi}{\sin \dfrac{m}{n} \pi}$

さらに、実数の連続性から、

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

を得る。そこで（∗）を示そう。

$u = \dfrac{1}{1+x^n}$ とおくと、$x = (\dfrac{1}{u} - 1)^{\frac{1}{n}}$ から

$I = \displaystyle\int_1^0 u (\frac{1-u}{u})^{\frac{m-1}{n}} dx$

$\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$ より、

$\dfrac{dx}{du}=-\dfrac{1}{u^2}(\dfrac{1}{u}-1)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\dfrac{1}{n}$

$dx=-\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{u^2}(\dfrac{1}{u}-1)^{\frac{1}{n}-1}du$

$$I=\int_0^1\left\{u(\frac{1-u}{u})^{\frac{m-1}{n}}\right\}\left\{\frac{1}{n}\frac{1}{u^2}(\frac{1}{u}-1)^{\frac{1}{n}-1}\right\}du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{u}(\frac{1-u}{u})^{\frac{m}{n}-1}du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{u}u^{1-\frac{m}{n}}(1-u)^{\frac{m}{n}-1}du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1u^{-\frac{m}{n}}(1-u)^{\frac{m}{n}-1}du$$

$$=\frac{1}{n}\int_1^0(1-t)^{-\frac{m}{n}}t^{\frac{m}{n}-1}(-1)dt$$

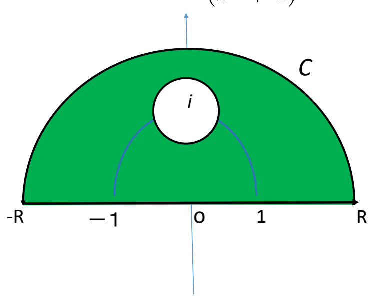
$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-t)^{-\frac{m}{n}}t^{\frac{m}{n}-1}dt \qquad \blacksquare$$

［例３］

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(n=1,2,\cdots)$$

$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$

とおくと、$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+!}}$



$f(z)$ の上半球上の極は $z=i$ のみで、i は $(n+1)$ 次の極だから

$$\mathrm{Re}\,s(i,f)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z-i)^{n+1}\frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right\}(\text{定理１より})$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z+i)^{-(n+1)}\right\}$$

$\dfrac{d}{dz}(z+i)^{-(n+1)}=-(n+1)(z+i)^{-(n+2)}$

$\dfrac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-(n+1)}=(-1)^2(n+1)(n+2)(z+i)^{-(n+3)}$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-(n+1)} = (-1)^n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)(z+i)^{-(n+n+1)}$$

より、

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-(n+1)}\right]_{z=i} = (-1)^n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n)(2i)^{-(2n+1)}$$

$$= (-1)^n\frac{n!(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n)}{n!}\cdot(2i)^{-(2n+1)}$$

$$= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\cdot(2i)^{-(2n+1)}$$

$$\mathrm{Re}\,s(i,f) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-(n+1)}\right]_{z=i}$$

$$= (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}i^{2n}i}$$

$$=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}(-1)^n i} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}i}$$

$$=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}2i}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 1)^2(2^n)^2 2i}$$

$$=\frac{(2n)!}{(n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 1)\cdot 2^n)^2 2i}$$

$$= \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(2n(2n-2)(2n-4)\cdots\cdot 2)^2 2i}$$

$$= \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2 2i}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2i}$$

よって、

$$\int_C \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \int_{-R}^{+R}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int_{C'}\frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$$

$$= 2\pi i\ \cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2i}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi(= \mathrm{Re}\,s(i,f), \text{留数定理})$$

$\lim\int_{C'}\frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = 0$**より、**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi \quad ■$$

[例4] $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \begin{cases}\dfrac{2\pi a^n}{1-a^2} & |a|<1\\ \dfrac{2\pi}{a^n(a^2-1)} & |a|>1\end{cases}\ (n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R})$

$$J_n = \int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

$$K_n = I_n + iJ_n$$

とおいて、I_n, J_n を同時に扱ってその値を求める。

$$K = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}K_n t^n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\displaystyle\frac{t^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}(1+r+r^2+\cdots)d\theta (r = t(\cos\theta + i\sin\theta))$$

ここで、$1-2a\cos\theta+a^2 = (e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)$ だから

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)} \cdot \frac{1}{1-r} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-te^{i\theta})(e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta}{(1-te^{i\theta})(e^{i\theta}-a)(1-ae^{i\theta})}$$

そこで、$f(z) = \dfrac{1}{(1-tz)(z-a)(1-az)}$ とおくと、単位円を C とおくと

$z = e^{i\theta}$ とおくと　$dz = ie^{i\theta}d\theta$

$\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{(1-te^{i\theta})(e^{i\theta}-a)(1-ae^{i\theta})}$ だから

$K = \dfrac{1}{i}\displaystyle\int_C f(z)dz$

$|a| < 1$ のとき単位円内の f の極は a だけであるから

$K = \dfrac{1}{i}\displaystyle\int_C f(z)dz = 2\pi \operatorname{Re}s(a, f) = \frac{2\pi}{(1-ta)(1-a^2)} = \frac{2\pi}{1-a^2} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$

よって、

$\sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n = \dfrac{2\pi}{1-a^2} \sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$

$I_n + iJ_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$

この実部虚部をとると、

$$I_n = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}, J_n = 0$$

を得る。$|a| > 1$ のとき、単位円内の極は a^{-1} のみ。

$$\operatorname{Re}s(a^{-1}, f) = \lim_{z\to a^{-1}}(z - \frac{1}{a})f(z) = \frac{1}{(-a)(1-a^{-1}t)(a^{-1}-a)}$$

$$= \frac{1}{(1-a^{-1}t)(a^2-1)}$$

よって、

$K = 2\pi \operatorname{Re}s(a^{-1}, f) = \dfrac{2\pi}{(1-a^{-1}t)(a^2-1)} = \dfrac{2\pi}{a^2-1} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} t^n$

よって、

$$I_n = \frac{2\pi}{(a^2-1)a^n}$$

を得る。■

＊本稿の執筆に際しては、以下を参考とした。

・複素数 30 講（志賀浩二、朝倉書店）

・解析入門（杉浦光夫、東京大学出版会）
・対話・微分積分学（笠原晧司、現代数学社）
・複素解析学入門（小堀憲、朝倉書店）

とかける。