置換群を用いたビアンキの関係式の証明（「置換群表記」を用いれば、テンソル計算を簡略化できます）

永山　2024 年 8 月 17 日

「置換群表記」とは…一般的には、右のような形式の表記をいいます。[置換対象]:{(置換 1)+(置換 2)+,…}
なお、分配法則（？）が成り立ちます。上記の表記=[置換対象]:(置換 1)+[置換対象]:(置換 2)+,…
ここで、[置換対象]は、添字を含む式です。(置換 1),(置換 2),…は、添字の置換を表す置換群です（下記）。
無置換…$(\square)$、$i \leftrightarrow j$…(ij) or (ji)、$i \to j \to k \to i$…(ijk) or (jki) or (kij)、$i \leftrightarrow j$の後に$k \leftrightarrow n$…$(ij)(kn)$（変換の順序と配置に注意←各括弧は、通常、非可換ですが、添字の重複がなければ可換です（$(ij)(kn)=(kn)(ij)$）。
【例】[置換対象]= $\partial^2_{kj} g_{in}$、(置換 1)= $(\square)$、(置換 2)= (ij)の場合…$\partial^2_{kj} g_{in}$:$\{(\square)+(ij)\} = \partial^2_{kj} g_{in} + \partial^2_{ki} g_{jn}$
【定理 1】[置換対象 A]＝[置換対象 B]:(置換β)の場合、[置換対象 A]:(置換α)は下記のように表されます。
[置換対象 A]:(置換α)＝{[置換対象 B]:(置換β)}:(置換α)＝[置換対象 B]:(置換β)(置換α)←∵置換群の性質

局所ミンコフスキー座標系（クリストッフェル記号$\Gamma^*{}_{,**} = 0$、共変微分＝偏微分となります、但し、$\partial_* \Gamma^*{}_{,**} \neq 0$）
リーマン曲率テンソル：$R_{ij,kn} = g_{ip} R^p{}_{j,kn} = g_{ip}\left(\partial_k \Gamma^p{}_{,jn} - \partial_n \Gamma^p{}_{,jk}\right) + g_{ip}\left(\Gamma^q{}_{,jn}\Gamma^p{}_{,qk} - \Gamma^q{}_{,jk}\Gamma^p{}_{,qn}\right)$は、局所ミンコフスキー座標系では、$R_{ij,kn} = g_{ip}\left(\partial_k \Gamma^p{}_{,jn} - \partial_n \Gamma^p{}_{,jk}\right)$…(1a)　「置換群表記」は、$R_{ij,kn} = g_{ip}\partial_k \Gamma^p{}_{,jn}$:$\{(\square)-(kn)\}$…(1b)

ビアンキの関係式(i)-(iii)（テンソル式＝座標系に依存しない）

(i)$R_{ij,kn} = -R_{ji,kn} = -R_{ij,nk} = R_{kn,ij}$
(ii)$R_{ij,kn} + R_{ik,nj} + R_{in,jk} = 0$
(iii)$\nabla_m R_{ij,kn} + \nabla_k R_{ij,nm} + \nabla_n R_{ij,mk} = 0$

局所ミンコフスキー座標系で成立することを示せば十分なので、以下、局所ミンコフスキー座標系における関係式(ii)(iii)を示します。

ビアンキの関係式(ii)について

左辺:$R_{ij,kn} + R_{ik,nj} + R_{in,jk}$の「置換群表記」は、$R_{ij,kn}$:$\{(\square)+(jkn)+(jnk)\}$…(2)
式(2)に式(1b)を代入すれば、【定理 1】より、式(2)＝$g_{ip}\partial_k \Gamma^p{}_{,jn}$:$[\{(\square)-(kn)\}\{(\square)+(jkn)+(jnk)\}]$
$= g_{ip}\partial_k \Gamma^p{}_{,jn}$:$\blacksquare\{(\square)+(jkn)+(jnk)-(kn)-(kn)(jkn)-(kn)(jnk)\}$…(3)（■については、下記参照）
ここで、式(1b)の置換対象:$g_{ip}\partial_k \Gamma^p{}_{,jn}$は、$j \leftrightarrow n$で不変です。∴■の部分を、$(jn)$としても式(3)は成立します。
下表上段は、式(3)の置換群の各項です。同下段は、(jn)(上段の値)です。各項の上下段は等価です。

第 1 項	第 2 項	第 3 項	第 4 項（－第 2 項）	第 5 項（－第 3 項）	第 6 項（－第 1 項）
$(\square)$	(jkn)	(jnk)	$-(kn)$	$-(kn)(jkn)=-(jk)$	$-(kn)(jnk)=-(jn)$
(jn)	$(jn)(jkn)=(kn)$	$(jn)(jnk)=(jk)$	$-(jn)(kn)=-(jkn)$	$-(jn)(jk)=-(jnk)$	$-(jn)(jn)=-(\square)$

したがって、上記 6 つの項の和＝0 ですから、∴式(2)＝0 であり、ビアンキの関係式(ii)が示されました。

ビアンキの関係式(iii)（いわゆるビアンキの恒等式）について

左辺:$\nabla_m R_{ij,kn} + \nabla_k R_{ij,nm} + \nabla_n R_{ij,mk}$の「置換群表記」は、$\nabla_m R_{ij,kn}$:$\{(\square)-(km)-(mn)\}$…(4)（∵関係式(i)）
局所ミンコフスキー座標系では、式(1a)より、$\nabla_m R_{ij,kn} = \nabla_m\{g_{ip}\left(\partial_k \Gamma^p{}_{,jn} - \partial_n \Gamma^p{}_{,jk}\right)\} = \left(\partial^2_{km}\Gamma_{i\ ,jn} - \partial^2_{mn}\Gamma_{i\ ,jk}\right)$
$= \frac{1}{2}\{\partial^3_{mkj} g_{in} + \partial^3_{mni} g_{jk} - \partial^3_{mki} g_{jn} - \partial^3_{mnj} g_{ik}\} = \frac{1}{2}\partial^3_{mkj} g_{in}$:$\{(\square)+(ij)(kn)-(ij)-(kn)\}$…(5)
式(4)に式(5)を代入すれば、式(4)＝$\frac{1}{2}\partial^3_{mkj} g_{in}$:$[\{(\square)+(ij)(kn)-(ij)-(kn)\}\{(\square)-(km)-(mn)\}]$
式(4)は、12 個の置換群の項を含み（下記）、置換対象:$\frac{1}{2}\partial^3_{mkj} g_{in}$は、$k \leftrightarrow m, j \leftrightarrow k, j \leftrightarrow m, i \leftrightarrow n$で不変です。
PC による各項の異同判定の結果を下記赤枠に示します（一部、体裁を整える修正を加えています）。

●置換群の積＆異同判定（各置換群は、アルファベット小文字と半角のカッコのみが有効、対象置換群は 256 個まで、””の前までを計算

項番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
対象置換群	()	-(km)	-(mn)	(ij)(kn)	-(ij)(knm)	-(ij)(kmn)	-(ij)	(ij)(km)	(ij)(mn)	-(kn)	(knm)	(kmn)
異同判定	A0	-A0	-A1	A2	-A3	-A2	-A4	A4	A3	-A5	A1	A5

●上記「対象置換群」に、等価性を失わずに、左から掛けられる置換群…〔Lx〕、同様に、右から掛けられる置換群…〔Rx〕

〔Lx〕の選択		〔Lx〕		〔Rx〕の選択		〔Ra〕
置換群〔Lx〕	()	(km)	(jk)	(jm)	(in)	

〔Lx〕は、36 個まで〔Rx〕は 108 個まで、
いずれも、表示は 18 個まで

したがって、上記 12 の項の和＝0 ですから、∴式(4)＝0 であり、ビアンキの関係式(iii)が示されました。
なお、任意の座標系での関係式(iii)の証明では、「置換群表記」の使用で、計算量は驚くほど少なくなります。