楕円の相関係数（その９）

nino

2017 年 9 月 1 日

（その８）では，楕円から作成される様々な形状の多角形について，多角形とそれを構成する三角形の面積を求めました．ここでは，多角形を構成する三角形を楕円の扇形まで拡張して，扇形の面積について考察します．

楕円の扇形

まず，楕円から作成される多角形について，使用する用語を含めて，その概要を（その８）から再掲します．

楕円（$a\cos\theta_i$，$b\sin\theta_i$）において，$\theta_i=360i/\mathrm{n}$（i＝0，1，2，・・，n−1）とすると，

　n 角形：例えば，n=3, 4, 5, 6, …の場合は，３角形，４角形，５角形，６角形，…

　頂点角度：n 角形で原点から隣り合う頂点を結ぶ線分の角度（360度/n）

具体例として，４角形（n＝4）の場合について説明します．

左図は，長軸：a＝20，短軸：b＝5（b/a比＝0.25）の楕円（赤色の太線）から作成した４角形（青色の鎖線）に対応する４つの扇形です（原点と黒塗り四角記号■を結ぶ赤色の太線）．最初の頂点をP0（i＝0に相当）とします．

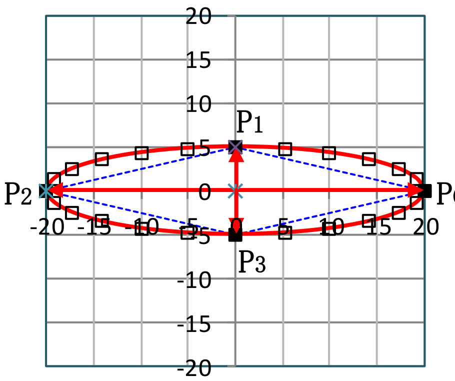
　始角度：最初の頂点P0はx軸に対して0度の座標なので，始角度0度ということにします．

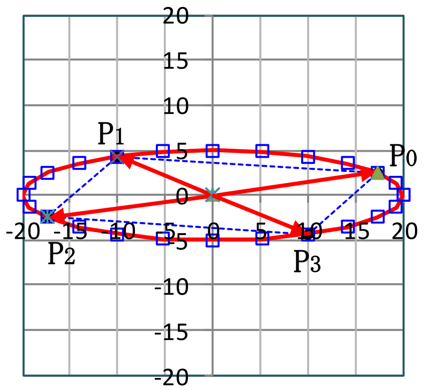
　　　　　P1，P2，P3はP0に頂点角度の倍数値：90度，180度，270度を加えた座標です．

　分割角度：頂点角度を等分割した角度（図の四角記号□で，90度を６分割した15度）

左図の扇形とは別の形状の扇形として，４つの頂点が左回りに分割角度15度ずつ移動した扇形，すなわち頂点P0，P1，P2，P3の角度θ_iにそれぞれ15度ずつを加えた始角度15度の扇形を作ることができます．さらに，始角度を30度，45度，・・というように別の形状の扇形を作ることができます．

右図は，始角度を30度とした４つの扇形から成る楕円です．





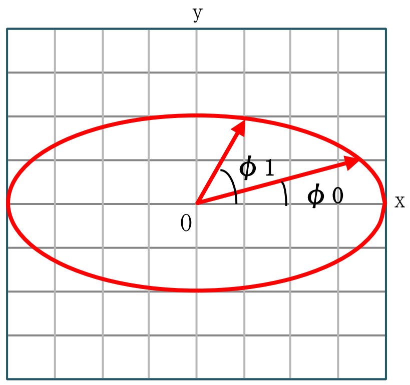
左図の４つの扇形の面積は，すべて等しいので，楕円の面積の1/4すなわち$\pi ab/4$＝78.54です．右図の各扇形の面積は扇形の面積公式で求めます．

楕円の扇形の面積（参考文献１）
X軸との角度をφとする扇形の面積F(φ)は，

$$F(\phi)=\frac{ab}{2}\left[\phi-\arctan\left(\frac{(b-a)\sin 2\phi}{b+a+(b-a)\cos 2\phi}\right)\right]$$

で表されるので，ϕ_0とϕ_1で挟まれる扇形の面積$F(\phi_{01})$は両者の差で表されます．

$$F(\phi_{01})=F(\phi_1)-F(\phi_0)$$



ｎ角形の頂点角度は360/n度(＝Nとします)であり，始角度をθ，始角度からi番目の頂点を$\mathbf{P}_i$（i＝0,1,2,・・，ｎ−1）とすると，隣り合う頂点の座標$\mathbf{P}_i$と$\mathbf{P}_{i+1}$は次式で表されます．

$\mathbf{P}_i$ ｛$a\cos(\theta+iN)$，$b\sin(\theta+iN)$｝

$\mathbf{P}_{i+1}$ ｛$a\cos(\theta+[i+1]N)$，$b\sin(\theta+[i+1]N)$｝

楕円の扇形の面積を求めるためには，まず，余弦定理を用いて原点から隣り合う頂点$\mathbf{P}_i$と$\mathbf{P}_{i+1}$を挟む図形上の角度$\angle P_iP_{i+1}$を求め，次に，それをx軸からの角度に変えて(ϕ_iとϕ_{i+1})，最後に，それらを扇形面積の式に代入して両者の差を算出します．
角度$\angle P_iP_{i+1}$は，余弦定理の式：$\cos\angle P_iP_{i+1}=(|P_i|^2+|P_{i+1}|^2-|P_iP_{i+1}|^2)/(2|P_i||P_{i+1}|)$に座標$\mathbf{P}_i$と$\mathbf{P}_{i+1}$の値を代入し，そのアークコサインから求められます．

計算の詳細は省きますが，始角度0度における３，４，５，６角形について，角度$\angle P_iP_{i+1}$とその扇形面積，併せて（その８）で求めた三角形面積を表にまとめました．

扇形の面積は多角形ごとにすべて同じ値になりました．三角形の面積も，（その８）でも示しましたが，多角形ごとにすべて同じ値でした．ここでは明記しませんが，始角度0度以外の場合も，扇形および三角形の面積はそれぞれの多角形で同じ値を示します．ただし，始角度30度の４角形（図を参照）からもわかるように，頂点の角度$\angle P_iP_{i+1}$はそれぞれ異なります．

このように，頂点角度で分割した楕円は，どのような始角度でも，そのすべての扇形や三角形の面積は等しくなりました．この意味を別の角度から調べてみます．

3角形	角度(度)	各三角形の面積	各扇形の面積
∠P_0P_1	156.59	43.30	104.72
∠P_1P_2	46.83	43.30	104.72
∠P_2P_0	156.59	43.30	104.72
合計	360.00	129.90	314.16
4角形	角度(度)	各三角形の面積	各扇形の面積
∠P_0P_1	90.00	50.00	78.54
∠P_1P_2	90.00	50.00	78.54
∠P_2P_3	90.00	50.00	78.54
∠P_3P_0	90.00	50.00	78.54
合計	360.00	200.00	314.16
5角形	角度(度)	各三角形の面積	各扇形の面積
∠P_0P_1	37.58	47.55	62.83
∠P_1P_2	132.13	47.55	62.83
∠P_2P_3	20.59	47.55	62.83
∠P_3P_4	132.13	47.55	62.83
∠P_4P_0	37.58	47.55	62.83
合計	360.00	237.76	314.16
6角形	角度(度)	各三角形の面積	各扇形の面積
∠P_0P_1	23.41	43.30	52.36
∠P_1P_2	133.17	43.30	52.36
∠P_2P_3	23.41	43.30	52.36
∠P_3P_4	23.41	43.30	52.36
∠P_4P_5	133.17	43.30	52.36
∠P_5P_0	23.41	43.30	52.36
合計	360.00	259.81	314.16

図形の拡大による楕円の扇形の面積の算出

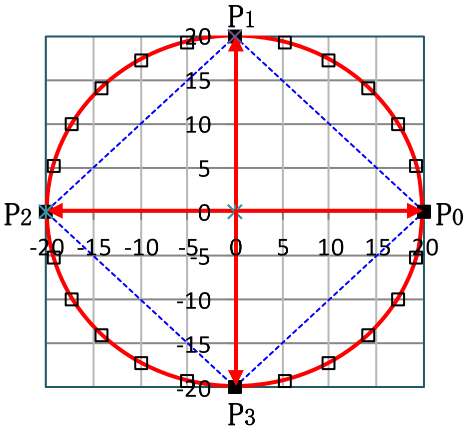
楕円は，半径aの円がy軸方向にb/a倍されたもので，楕円の面積は円の面積のb/a倍（$\pi a^2 \times b/a = \pi ab$）です．同様に考えると，楕円の扇形は，半径$a$の円の中の扇形がy軸方向に$b/a$倍されたものですから，楕円の扇形の面積は，円の扇形の面積Sのb/a倍（Sb/a）となります．

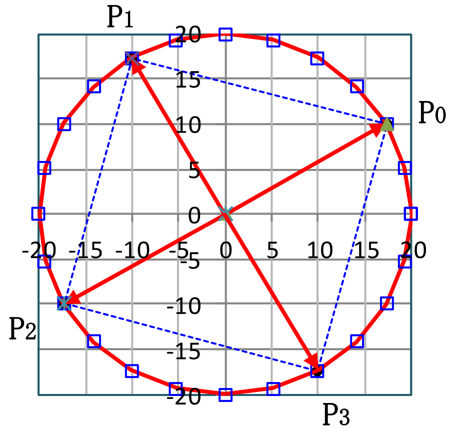
したがって，楕円の扇形の面積を求めるためには，楕円をy軸方向にa/b倍拡大した円の扇形の面積を求め，それをb/a倍すれば良いわけです．

この具体例として，先に示した２つの４角形に対応した楕円について説明します．

左図は，始角度0度の楕円をy軸方向にa/b（20/5=4）倍して作成された円およびその４つの扇形を示しています．右図は，同じく始角度30度の楕円をy軸方向にa/b（20/5=4）倍して作成されたの円およびその４つの扇形です．

両図とも，始角度が異なるだけで，４角形は正４角形となります．したがって，円の扇形の面積として，円の面積を4等分した$\pi a^2/4 = 314.16$が得られます．楕円の扇形の面積はそのb/a（5/20=0.25）倍である78.54となり，先の表の結果と一致します．





一般化した多角形（ｎ角形）についてみると，楕円の座標をy軸方向にa/b倍した円では，多角形は正多角形で表され，その円の面積の1/ｎ（＝πa^2/n)が円の扇形の面積に相当します．したがって，楕円の扇形の面積はそのb/a倍であるπa^2/n×b/a＝πab/nとなります．

この式より，３，５，６角形における楕円の扇形面積を求めると，それぞれ104.72，62.83，52.36が得られ，先の表の結果と一致します．このように，図形の拡大により得られた楕円の扇形の面積式は，先の定積分より求められた楕円の扇形面積の計算式に比べてかなり簡単です．その理由は，拡大した円に対応する多角形が正多角形だからです．

図形の拡大による楕円の多角形の面積の算出

（その８）では，三角関数の数式から，楕円の多角形の面積式を導出しましたが，ここでは，前述の扇形の場合と同様に，図形の拡大による楕円の三角形の面積を計算します．

例として，先の図の円の４角形を構成する４つの三角形（青色の鎖線）についてみると，円の三角形の面積は，角度∠$\mathrm{P}i\mathrm{P}_{i+1}$はすべて90度（頂点角度＝360/4）の直角三角形なので，200（＝20^2/2）が得られます．したがって，楕円の多角形における三角形の面積はその025(＝5/20）倍の50となり，先の表の結果と一致します．

一般化した多角形（ｎ角形）についてみると，円の三角形の面積は，角度∠$\mathrm{P}i\mathrm{P}_{i+1}$(頂点角度＝360/n)用いて，{$a^2$sin(∠$\mathrm{P}i\mathrm{P}_{i+1}$)}/2＝{$a^2$sin(360/n)} /2で表されます．したがって，楕円の三角形の面積はそのb/a倍の{absin(360/n)} /2となります．この式は（その８）で得られた式と一致します．この式から３，５，６角形における楕円の扇形面積を求めると，それぞれ43.30，47.55，43.30が得られ，先の表の結果と一致します．

このように，図形を用いると，楕円の多角形およびそれを構成する三角形や扇形の面積を容易に求めることができます．また，円の中に作成した同一面積をもつ任意の図形について，円を楕円に変換して，その形状を調べるなどの応用も可能です．

参考文献１）http://keisan.casio.jp/exec/system/1343633437