楕円の相関係数（その８）

nino

2017 年 8 月 20 日

楕円の相関係数と同じ相関係数をもつ多角形を楕円から作成することができます．その多角形の形状と面積について考察します．

楕円から作られる多角形

まず，楕円から多角形を作成します．

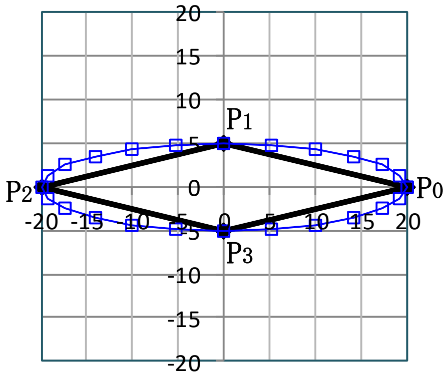
楕円$x^2/a^2+y^2/b^2=1$の媒介変数は，$x_i=a\cos\theta_i$，$y_i=b\sin\theta_i$で表されます．ここでは，0度から360度の範囲について考えます．角度を$\theta_i=360(i/\mathrm{n})$とし，$i=0$，1，2，・・，n-1 とすると，n＝3の時は座標が３つ存在し，これらの座標（頂点）を結ぶと３角形が得られます．原点から隣り合う頂点を結ぶ線分の角度（以下，頂点角度という）はすべて360度／3＝120度となります．ただし，この角度はθ_iであり，図形上の角度ではありません．

同様に，n＝4，5，6，・・の時は，頂点角度がそれぞれ90度，72度，60度，・・の４角形，５角形，６角形，・・が作成されます．

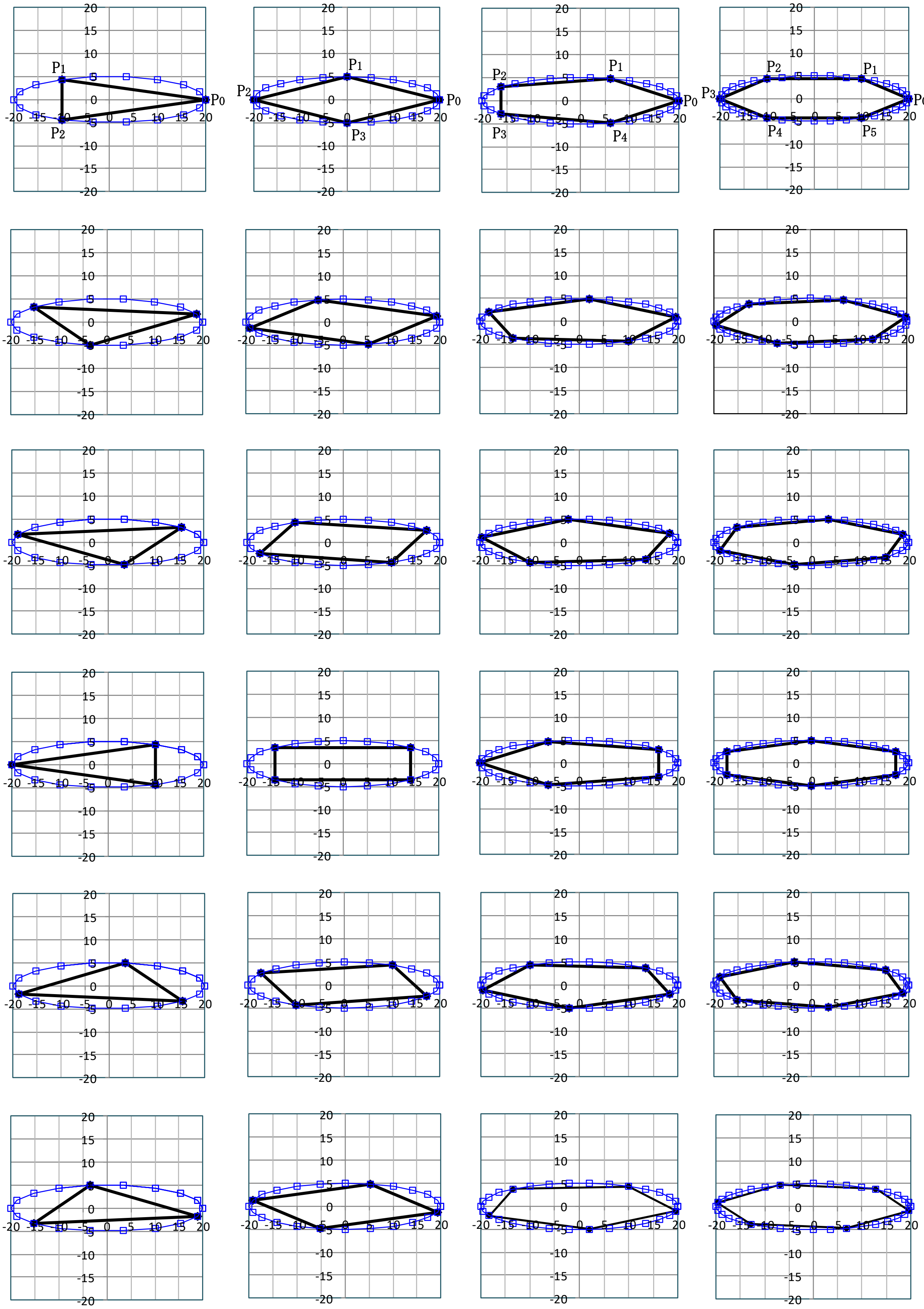
具体例として，４角形（n＝4）の場合を説明します．

次図は，長軸：$a=20$，短軸：$b=5$（b/a比＝0.25）の楕円（青色の細線）から生成した４角形です（黒塗り四角記号■を結ぶ黒太線）．頂点P0を最初の頂点（$i=0$に相当）とします．最初の頂点P0はx軸に対して0度の座標なので，始角度0度ということにします．頂点P1，P2，P3はそれぞれ$i=1$，2，3に相当し，始角度0度に頂点角度90度の倍数値（90度，180度，270度）を加えた座標です．これは，各辺の長さが等しい平行四辺形となります．

青色の四角記号（□）は頂点角度（90度）を６等分に分割した15度ごとの楕円の座標点です．この場合，分割角度は15度であるということにします．この４角形とは別の形状の４角形として，４つの頂点が左回りに分割角度15度ずつ移動した４角形すなわち頂点P0，P1，P2，P3の角度にそれぞれ15度ずつを加えた始角度15度の４角形を作ることができます．さらに，始角度を30度，45度，・・というように新たに別の形状の４角形を作ることができます．３，４，５，６角形について，始角度を変えた様々な形状を見てみます．



最上段の図は始角度0度の３，４，５，６角形で，次段は頂点角度を６等分した分割角度（20，15，12，10度）を始角度とした多角形です．同様に，分割角度を加えていきます．



最下段の多角形の始角度にさらに分割角度を加えると，頂点角度が始角度となり，最上段の始角度0度の形状と一致します．始角度を分割角度以外の値に変えることによって，先の形状とは異なる多角形を作成することができます．また，楕円のb/a比を変えると，相関係数の異なるすなわちy軸方向が変化した形状の多角形を作成することができます．

多角形の相関係数

（その１）では，楕円の左45度回転楕円の相関係数は$R=\{1-(b/a)^2\}/\{1+(b/a)^2\}$で表されることを示しました．この式は同じ$b/a$ 比をもつ楕円ならば，楕円の回転や移動とは関係なく，相関係数は同じ値をもつことを意味しています．このことは，（その２）で説明したベクトルで考えるとより明確です．したがって，先の多角形群は，b/a比＝0.25の楕円を元に作成されていますから，すべて同じ相関係数0.882を示します．

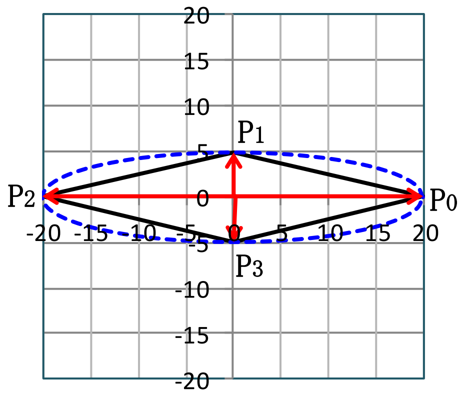
このように，辺の長さや角度が異なる多角形には共通項がないように見えますが，１つの楕円から上述の方法で作成した多角形群はその楕円と同一の相関係数をもちます．なお，b/a ＝1の場合は，楕円は円，多角形は正多角形となるので，それらの相関係数はすべて0です．

多角形の面積

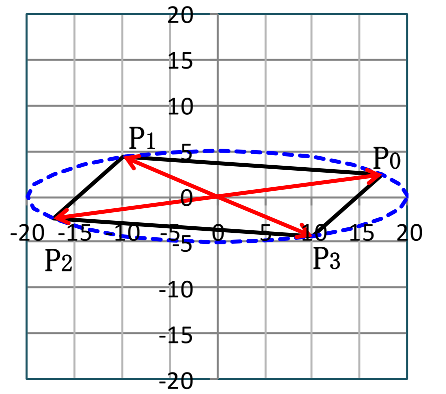
同一の相関係数をもつ多角形の面積を求めてみます．

楕円（a＝20，b＝5）の４角形における始角度＝0度（左図）と始角度＝30度（右図）の２例について説明します．４角形を原点から各頂点を結ぶ線分で囲まれた４つの三角形に分割すると，それらの面積の和が４角形の面積です．この三角形の面積は外積（二つのベクトルがつくる平行四辺形の面積）の1/2であることを利用します．

始角度＝0度



始角度＝30度



まず，始角度＝0度の場合，△0P0P1の面積は，ベクトル**P0**(20, 0)とベクトル**P1**(0, 5)の外積の1/2ですから，

△0P0P1の面積＝(20×5－0×0)／2＝50

が得られます．同様に，△0P0P1以外の３つの三角形の面積もすべて50となるので，４角形の面積は4×50＝200です．このように，外積を用いると，比較的簡単に多角形の面積を求めることができます．

次に，始角度θ＝30度（以下，角度は「度」で表します）の場合における面積を求めます．二つのベクトル$\mathbf{P_0}$と$\mathbf{P_1}$は，頂点角度が90度ですから，

$\mathbf{P_0}$ ｛$a\cos\theta$，$b\sin\theta$｝

$\mathbf{P_1}$ ｛$a\cos(\theta+90)$，$b\sin(\theta+90)$｝

で表されます．したがって，

$$\triangle 0P_0P_1の面積＝\{a\cos\theta\times b\sin(\theta+90)-b\sin\theta\times a\cos(\theta+90)\}/2$$
$$=\{20\cos30\times5\sin(30+90)-5b\sin30\times20\cos(30+90)\}/2=50$$

が得られ，他の３つの三角形の面積も50となります．したがって，４角形の面積は200です．さらに，他の始角度の４角形についてもすべて同じ結果が得られます．このように，始角度が異なるすなわち形状が異なる４角形の面積およびそれを構成する三角形の面積すべて等しいことがわかります．

さらに，一般化して，ｎ角形について，原点と任意の隣り合う２つの頂点を結ぶ三角形の面積を求めてみます．
ｎ角形の頂点角度は360／ｎ（＝Nとします）であり，始角度をθ，始角度からｉ番目の頂点をP_i（ｉ＝0, 1, 2,・・，n-1）とすると，隣り合う２つのベクトル$\mathbf{P}_i$と$\mathbf{P}_{i+1}$は

$\mathbf{P}_i$ ｛$a\cos(\theta+iN)$，$b\sin(\theta+iN)$｝

$\mathbf{P}_{i+1}$ ｛$a\cos(\theta+[i+1]N)$，$b\sin(\theta+[i+1]N)$｝

で表されます．したがって，$\triangle 0P_iP_{i+1}$の外積は

$$\triangle 0P_iP_{i+1}の外積＝a\cos(\theta+iN)\times b\sin(\theta+[i+1]N)-b\sin(\theta+iN)\times a\cos(\theta+[i+1]N)$$
$$=ab/2\ \{[\sin(2\theta+[2i+1]N)-\sin(-N)]-[\sin(2\theta+[2i+1]N)+\sin(-N)]\}$$
$$=ab/2\ \{-2\sin(-N)\}$$
$$=ab\sin N$$

となりますので，$\triangle 0P_iP1_{i+1}$の面積＝$(ab\sin N)/2$が得られます．この式は始角度θに依存しませんので，ｎ角形を構成する三角形の面積はすべて等しいことがわかります．したがって，ｎ角形の面積＝n×$(ab\sin N)/2$ となります．

例えば，４角形の面積式は4×(20×5×sin90)/2＝200で，先の結果と一致します．同様に，他の多角形の面積を求めますと，３角形は129.9，５角形は237.8，６角形は259.8が得られます．また，それらを構成する三角形の面積は，３角形で43.3，５角形で47.5，６角形で43.3です．３角形と６角形の三角形面積が等しいのは，両者の頂点角度のsinが等しい（sin120＝sin60）ためで，６角形の面積は３角形の面積の２倍になっています．なお，ｎ角形のｎ→∞とすると，楕円となり，その面積はπabです．

以上まとめると，相関係数（b/a比）が等しい多角形（ｎ角形）は，①原点と任意の隣り合う２つの頂点を結ぶ三角形の面積はすべて，$\{ab\sin(360/n)\}/2$，②その多角形の面積は，$n\times\{ab\sin(360/n)\}/2$　で表されることがわかりました．

次回は，楕円の扇形の面積を求める方法などについて紹介します．