

楕円の相関係数（その7）

nino

2017年8月10日

（その2）で紹介しましたが、楕円（ $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ）の相関係数は回転角が45度の時に $\{1 - (b/a)^2\} / \{1 + (b/a)^2\}$ で表され、長軸と短軸の長さの比 b/a は相関の程度を示す有用な指標になると考えられます。そこで、角度が未知の XY 分布を45度の $X'Y'$ 分布に変換して、 b/a 比を求める方法を紹介します。

45度の分布に変換する方法

角度が未知（ α 度とします）の XY 分布から角度が45度の $X'Y'$ 分布に変換するためには、 α 度の XY 分布を β 度回転させて角度が45度（ $= \alpha + \beta$ ）になれば良いわけです。

（その4）によると、45度の楕円では変数 X' と Y' の標準偏差 $S_{X'}$ と $S_{Y'}$ は等しくなりますから、 $S_{X'} = S_{Y'}$ が45度であることの必要条件です。しかし、実際のデータには誤差が含まれるので、それらの差の絶対値 $|S_{X'} - S_{Y'}|$ を最小にさせる必要があります。

したがって、角度 α 度の XY 分布から角度45度の $X'Y'$ 分布を求めるには、まず、 XY データを β 度回転させた X' と Y' の数式をそれぞれ作り、次に、それらの標準偏差 $S_{X'}$ と $S_{Y'}$ の差の絶対値 $|S_{X'} - S_{Y'}|$ が最小になる条件を満たす β を求めます。

これら一連の操作は、Excelのソルバー・アドインを用いて比較的簡単にできます。

Excelのソルバー・アドインについて

ソルバーとは、あるセルに数式の目標値を指定して、その結果を得るためにいくつかの制約条件を設定し、他のセルの値を変化させて最適な数値を導き出す機能です。例えば、あるセルの最小値を求めるために、他のセルの値を変化させることができます。ここでは、あるセルの最小値は $|S_{X'} - S_{Y'}|$ 、他のセルの値は β に該当します。

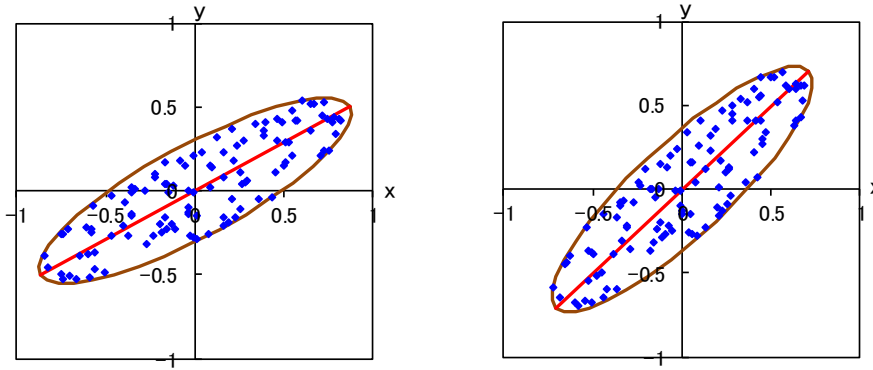
なお、ソルバーの設定方法と使用方法については、様々なサイトで紹介されていますので、それらを参考にしてください。

Excelを用いた45度の分布への変換と b/a 比の算出

角度が不明の分布を用いるとわかりにくいので、例として、既知の楕円曲線とその楕円内の乱数分布を用いて、45度の分布への変換方法を説明します。

左図は、角度 $\alpha = 30$ 度の楕円曲線（ $a=1$, $b=0.268$ ）とその楕円内に生成させた乱数（112個のデータ）の分布です。相関係数は、前者が0.832（角度が30度の楕円の理論値）で、後者は0.841です。

右図は、角度 $\alpha = 30$ 度の分布を15度回転させて45度（ $\alpha + \beta = 45$ ）の分布に変換したものです。相関係数は、楕円が0.866（角度が45度の理論値）、乱数データが0.873となります。



楕円と乱数分布のうち前者を用いて、回転角 β を求める方法を具体的に説明します。次表は、Excelとソルバーのパラメーターの設定画面で、その内容は以下の通りです。

楕円 ($x_i^2/a^2 + y_i^2/b^2 = 1$) の媒介変数は $x_i = a \cos\theta_i$, $y_i = b \sin\theta_i$ なので、回転角が未知 (α 度とします) の楕円 (X_i, Y_i) は次式で表されます。

$$X_i = a \cos\theta_i \cos\alpha - b \sin\theta_i \sin\alpha$$

$$Y_i = a \cos\theta_i \sin\alpha + b \sin\theta_i \cos\alpha$$

この式において、 $a = 1$, $b = 0.268$, $\alpha = 30$ 度とした X_i と Y_i の値をそれぞれセルC7～C42とセルD7～D42に、 $\theta_i = 0 \sim 350$ 度 ($i = 0, 1, 2, \dots$) まで10度間隔で36個の値を入力します。参考のため、セルC2とD2には X_i, Y_i の標準偏差 S_X と S_Y を STDEV関数を用いてそれぞれ入力しておきます。

次に、角度 α 度の $X_i Y_i$ 分布を β 度回転させた $X_i' Y_i'$ 分布は、次の数式をそれぞれF7～F42とG7～G42に入力します。 X_i と Y_i はC列とD列の7～42行の値を、 β はセルF4を参照します。

$$X_i' = X_i \cos\beta - Y_i \sin\beta$$

$$Y_i' = X_i \sin\beta + Y_i \cos\beta$$

最後に、 X_i' と Y_i' の標準偏差 $S_{X'}$ と $S_{Y'}$ をセルF2とセルG2に STDEV関数を用いて入力した後、それらの差の絶対値 $|S_{X'} - S_{Y'}|$ の数式をセルF3に入力します。なお、セルF4の β 値は空欄あるいは15度以外の数値を入力しておきます。

ソルバーのパラメーターについては、表にしたがい設定します。「制約条件の対象」を表のように設定したのは、 $0 \leq$ 回転角 $\alpha \leq 45$ 度を前提とした場合です。

入力終了後、ソルバーの「解決」をクリックし、ソルバーの結果の「OK」をクリックすれば、Excel表に結果 (β とそれに対応した X_i' と Y_i' の値など) が表示されます。

相関係数 $R_{X'Y'}$ は出力されたデータ X_i', Y_i' から CORREL関数により求めます。そして、 b/a 比は次式より求められます。 $b/a = \sqrt{(1 - R_{X'Y'}) / (1 + R_{X'Y'})}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		回転角未知のXY分布			左記のβ度回転による45度のX'Y'分布			
2		$S_x, S_y =$	0.628	0.395	$S_{x'}, S_{y'} =$	0.525	0.525	
3					$ S_{x'} - S_{y'} =$	0.000		
4					回転角β度=	15.00		
5					数式>	$X \cos \beta - Y \sin \beta$	$X \sin \beta + Y \cos \beta$	
6	No.	変数名>	X	Y		X'	Y'	
7	1		0.866	0.500		0.707	0.707	
8	2		0.830	0.533		0.663	0.729	
9	3						0.729	
10	4						0.707	
11	5						0.663	
12	6						0.600	
13	7						0.518	
14	8						0.420	
15	9						0.309	
16	10						0.190	
17	11						0.064	
18	12						-0.064	
19	13						-0.189	
20	14						-0.309	
21	15						-0.420	
22	16						-0.518	
23	17						-0.600	
24	18						-0.663	
25	19						-0.707	
26	20						-0.729	
27	21						-0.729	
28	22						-0.707	
29	23						-0.663	
30	24						-0.600	
31	25						-0.518	
32	26						-0.420	
33	27						-0.309	
34	28						-0.190	
35	29						-0.064	
36	30						0.064	
37	31						0.189	
38	32						0.309	
39	33						0.420	
40	34						0.518	
41	35		0.860	0.390		0.729	0.600	
42	36		0.876	0.452		0.729	0.663	

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) ↑

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V)

変数セルの変更:(B) ↑

制約条件の対象:(U)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E) ↓

解決方法
 滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプルックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューション エンジンを選択してください。

回転角未知の実測値を対象にする場合は、列C, Dの X_i, Y_i データを実測値に置き換え、列F, G列の X_i', Y_i' データの行数を実測値のデータ数に合わせて変更します。また、標準偏差 $S_X, S_Y, S_{X'}, S_{Y'}$ や相関係数 $R_{X'Y'}$ も実測値のデータ数に合わせて範囲指定を変更します。

なお、未知の角度 α は、式 $\alpha = 45 - \beta$ から求まります。先の乱数分布に適用したところ回転角 β は14.8度となりましたので、 $\alpha = 45 - 14.8 = 30.2$ 度が得られました。

角度が未知の分布を角度が45度（正の相関）の分布に変換する方法を紹介しましたが、負の相関を求めたい場合は角度を135度として同様に変換します。

この方法を実測値に適用するためには、変数 X_i, Y_i の単位の妥当性などについて検討しておく必要があります。