楕円の相関係数（その６）

nino

2017 年 8 月 1 日

（その３）では，楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ の回転角が 45 度の場合における回帰式などについて考察しました．ここでは，任意の回転角 α における回帰式とその特徴を調べてみます．

回転角 α の楕円の回帰係数 A

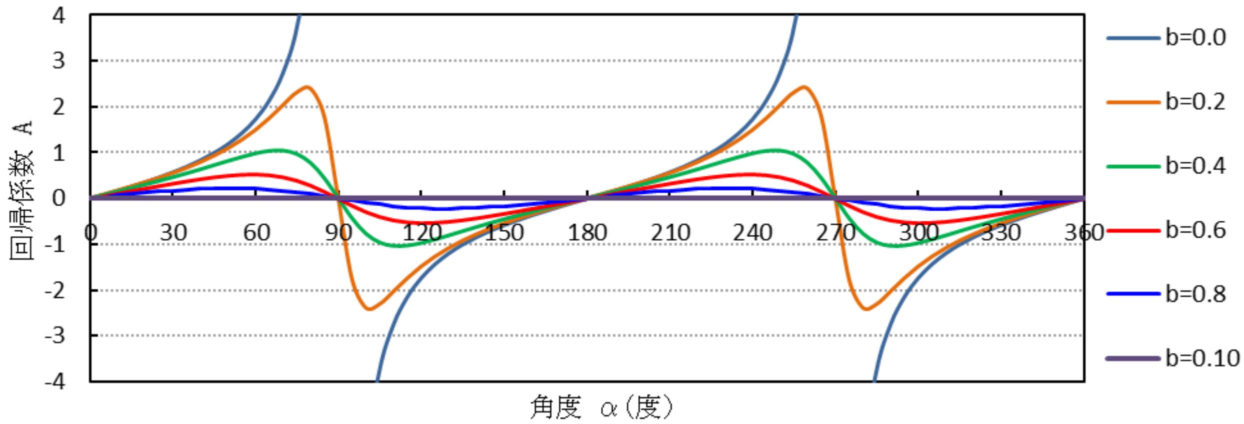
回転楕円の回帰式 $Y_i=AX_l+B$ の回帰係数 A は，共分散を S_{XY}，分散を S_{XX} とすると，

$$A=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

で表されます．$S_{XX}=S_X^2$（標準偏差 S_X の 2 乗）ですから，回帰係数 A の式に（その４）で得られた S_{XY} と S_X を代入すると，

$$\begin{aligned}A&=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}\\&=\frac{\dfrac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{4}}{\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}}\right]^2}\\&=\frac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{\left\{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}}\\&=\frac{(a^2-b^2)\cos\alpha\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}\\&=\frac{(a^2-b^2)\tan\alpha}{a^2+b^2\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

が得られます．回帰係数 A の変化を 0～360 度の範囲で $a=1$ とし b 値別に見てみます．



$b>0$（楕円）の場合は，回帰係数 A は 180 度ごとに同じ変化パターンを繰り返しており，角度 α が 0～90 度の範囲で極大，90～180 度の範囲で極小を示します．回帰係数 A が極大と極小を示す角度 α は b 値ごとに異なっており，例えば角度 α が 0～90 度の範囲では，b 値が小さいほど極大値は大きく，かつ，極大値を示す角度 α は 90 度の方向に移動していきます．
しかし，$b=0$（直線）の場合は，回帰式 $A=\tan\alpha$ となり，例えば，角度 α が 0～90 度の範囲では回帰係数 A は単調増加し，$\alpha=\pi/2$ の時に無限大となります．$\pi/2+m\pi$（$m=0$，1，2，3，・・）の時は，同様に無限大となります．

回帰係数 A の微分

極大・極小を示す角度 α を求めるため，回帰係数 A の微分を行います．

$$A=\frac{(a^2-b^2)\tan\alpha}{a^2+b^2\tan^2\alpha}$$

$\tan\alpha$ と分数式 $h(\alpha)/g(\alpha)$の微分はそれぞれ

$$\frac{d(\tan\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \left[\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)}\right]\Big/d\alpha=\frac{h'(\alpha)g(\alpha)-h(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}$$

ですから，A の微分は，次のようになります．

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\alpha}&=\frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2\tan^2\alpha)^2}\left\{\frac{1}{\cos^2\alpha}(a^2+b^2\tan^2\alpha)-\tan\alpha\left(2b^2\tan\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\right\}\\&=\frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2\tan^2\alpha)^2\cos^2\alpha}\left\{(a^2+b^2\tan^2\alpha)-(2b^2\tan^2\alpha)\right\}\\&=\frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2\tan^2\alpha)^2\cos^2\alpha}(a^2-b^2\tan^2\alpha)\end{aligned}$$

ここで，$dA/d\alpha=0$ とおくと，

$$\tan\alpha=\pm\frac{a}{b}, \qquad \alpha=\arctan\left(\pm\frac{a}{b}\right)$$

が得られます．したがって，$\tan\alpha=\pm a/b$ を回帰係数 A の式に代入すると，

$$\begin{aligned}A&=\frac{(a^2-b^2)(\pm a/b)}{a^2+b^2(\pm a/b)^2}\\&=\frac{\pm(a^2-b^2)}{2ab}\end{aligned}$$

となります．正が極大，負が極小に対応します．
ただし，微分式の分母≠0 の条件下で成り立つので，$(a^2+b^2\tan^2\alpha)^2>0$ ですから，$\cos^2\alpha\neq 0$，すなわち $\alpha\neq\pi/2+m\pi$（$m=0$，1，2，3，・・）が必要条件となります．

回帰係数Ａと相関係数Ｒとの関係

（その３）では，α＝45 度の時に回帰係数 A と相関係数 R は一致することを示しました．これとは逆に，A＝R の時の α 値を求めてみます．

回帰係数 A と相関係数 R は，変数 X と Y の共分散を S_{XY}，X の分散を S_{XX}，そして，X，Y の標準偏差をそれぞれ S_X，S_Y とすると，次式で表されます．

$$A = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \qquad R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

ここで，A＝R とすると，

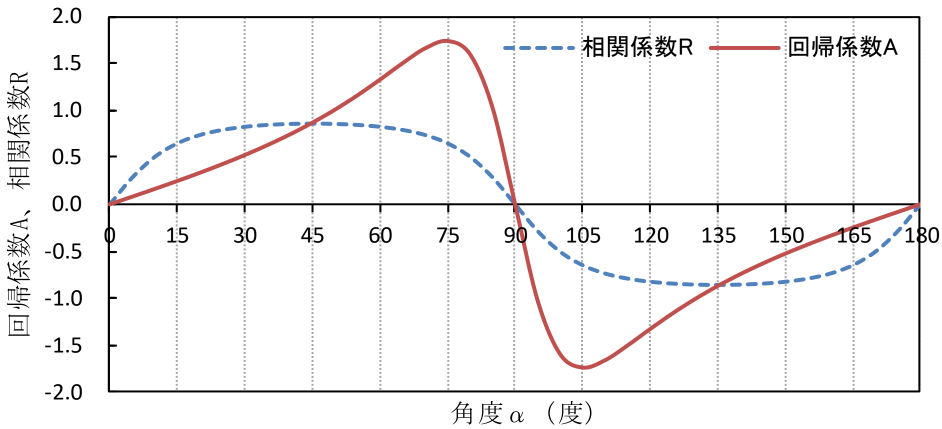
$$S_{XX} = S_X S_Y \qquad \rightarrow \qquad S_X = S_Y$$

すなわち，X の標準偏差と Y の標準偏差が等しい時，回帰係数と相関係数は一致するわけです．この式は，（その４）における２変数の標準偏差が等しい場合，あるいは相関係数が極大・極小をとる場合の結果と同じですから，cos2α＝0 が得られます．

したがって，m＝0, 1, 2,・・とすると，次の α 値の時に A＝R が成立します．

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\pi$$

回帰係数と相関係数の関係を b＝0.268 の場合について具体的にグラフで見てみます．



回帰係数は α＝75 度 (tanα＝3.73)の時に極大値 1.73 を，α＝105 度 (tanα＝－3.73)の時に極小値－1.73 を示します．また，α＝45 度と 135 度の時に回帰係数と相関係数は交差すなわち等しくなり，その値は 0.866 と－0.866 で相関係数の極大と極小に相当します．

これまで６回にわたり「楕円の相関係数」に関する記事を展開してきましたが，疑問・質問やご意見がありましたら，下記の nino 宛アドレスにお願いします．

nino： k.n.-zue06114@outlook.jp