楕円の相関係数（その５）

nino

2017 年 7 月 20 日

（その２）では，左 45 度回転の楕円の相関係数についてベクトルと三角関数の合成公式を用いて考察しました．ここでは，任意の回転角 α の楕円について同様に検討します．

回転楕円の相関係数のベクトル表示

（その４）の結果から，回転角 α の楕円（長軸：a，短軸： b ）の相関係数は，

$$
\begin{aligned}
R_{XY} &= \frac{(a^2-b^2)\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)\left(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha\right)}} \\
&= \frac{(a\cos\alpha)(a\sin\alpha)+(b\sin\alpha)(-b\cos\alpha)}{\sqrt{\{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2\}\{(a\sin\alpha)^2+(-b\cos\alpha)^2\}}}
\end{aligned}
$$

と書き換えることができます．この式において，分子はベクトル P($a$cos α， $b$sin α)とベクトル Q($a$sin α , －$b$cos α)の内積, 分母はそれぞれのベクトルの長さの積とみなせます.

余弦定理によれば，ベクトル P と Q および PQ{a(sin α －cos α)， －b(cos α ＋sin α)}の長さをそれぞれ|P|，|Q|，|PQ|とすると，∠POQ（＝ γ）のコサインは次式で表されます.

$$
\cos\gamma = \frac{|P|^2+|Q|^2-|PQ|^2}{2|P|\ |Q|}
$$

各ベクトルの長さは，

$$
\begin{aligned}
|P| &= \sqrt{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2} \\
|Q| &= \sqrt{(a\sin\alpha)^2+(-b\cos\alpha)^2} \\
|PQ| &= \sqrt{a^2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(-b)^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

ですから，これらを余弦定理の式に代入すると

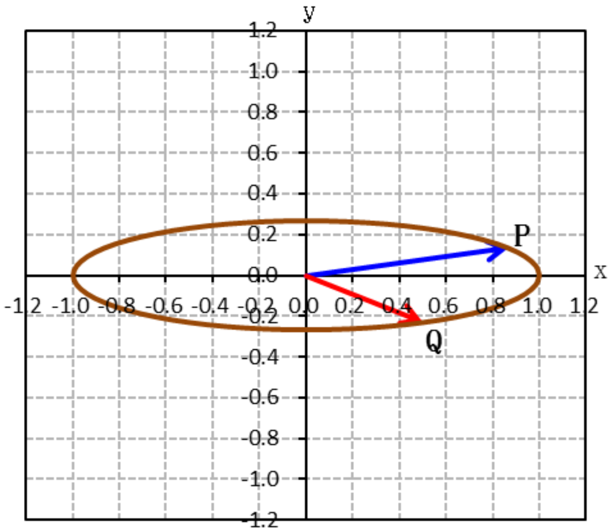
$$
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha)^2+(-b\cos\alpha)^2-\left\{a^2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(-b)^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2\right\}}{2\sqrt{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2}\ \sqrt{(a\sin\alpha)^2+(-b\cos\alpha)^2}} \\
&= \frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha+a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}{2\sqrt{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2}\ \sqrt{(a\sin\alpha)^2+(b\cos\alpha)^2}} \\
&\quad \frac{-\{a^2\sin^2\alpha-2a^2\cos\alpha\sin\alpha+a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\alpha+2b^2\cos\alpha\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha\}}{2\sqrt{(a\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2}\ \sqrt{(a\sin\alpha)^2+(b\cos\alpha)^2}} \\
&= \frac{\left(a^2-b^2\right)\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)}\ \sqrt{(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}} \ = \ R_{XY}
\end{aligned}
$$

となり，（その１）の共分散等により求めた回転角 α の楕円の相関係数 R_{XY} と一致します．また，∠POQ(γ)を x 軸を境として∠POx(γ_P)と∠xOQ（ γ_Q ）の２つに分けた場合は，次式が成立します．

$$\cos\gamma_P = \frac{a\cos\alpha}{|P|}, \qquad \sin\gamma_P = \frac{b\sin\alpha}{|P|}$$

$$\cos\gamma_Q = \frac{a\sin\alpha}{|Q|}, \qquad \sin\gamma_Q = \frac{b\cos\alpha}{|Q|}$$

下図は, a＝1, b＝0.268 の楕円曲線と, 回転角 α ＝30 度の場合におけるベクトル P(0.866, 0.134)と **Q**(0.500, －0.232)を書き加えたものです．



各ベクトルの長さと角度を計算すると，|P|＝0.876，|**Q**|＝0.551，|**PQ**|＝0.518，∠POQ＝33.69°（∠POx＝8.79°，∠xOQ＝24.90°）が得られました．

三角関数の合成公式を用いた回転角 α 度の楕円の相関係数の導出

三角関数の合成公式を用いて回転角 α 度の楕円（*X*，*Y*）の相関係数の導出を行います．
三角関数の合成公式は，振幅を H_x，H_Y，位相を ϕ_X，ϕ_Y とすると，

$$\begin{aligned} X &= a\cos\alpha\cos\theta - b\sin\alpha\sin\theta \\ &= H_X\cos(\theta+\phi_X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= a\sin\alpha\cos\theta + b\cos\alpha\sin\theta \\ &= H_Y\cos(\theta-\phi_Y) \end{aligned}$$

で表されます．ここで，振幅と位相は以下の通りです．

$$H_X = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$$

$$H_Y = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$\cos\phi_X = \frac{a\cos\alpha}{H_X}, \qquad \sin\phi_X = \frac{b\sin\alpha}{H_X}$$

$$\cos\phi_Y = \frac{a\sin\alpha}{H_Y}, \qquad \sin\phi_Y = \frac{b\cos\alpha}{H_Y}$$

一方，回転角 α 度の楕円（X，Y）は，三角関数の合成公式の記号をそのまま用いると，$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ ですから，次のように表すことができます．

$$
\begin{aligned}
X &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
&= a\cos\alpha\cos\theta - b\sin\alpha\sin\theta \\
&= H_X\cos(\theta+\phi_X) \\
Y &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\
&= a\sin\alpha\cos\theta + b\cos\alpha\sin\theta \\
&= H_Y\cos(\theta-\phi_Y)
\end{aligned}
$$

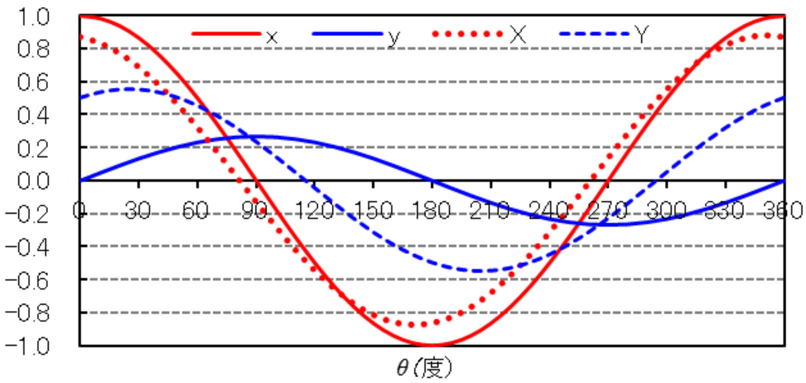
この式は，三角関数の合成公式そのものです．
三角関数とベクトルの各数式を比べてみると，振幅と位相はそれぞれベクトルの長さと角度に一致しており，$|\mathrm{P}|=H_x$，$|\mathrm{Q}|=H_Y$，$\angle \mathrm{P0x}=\phi_X$，$\angle \mathrm{x0Q}=\phi_Y$ が成立しています．

次に，位相差のコサインを計算すると，

$$
\begin{aligned}
\cos(\phi_X-(-\phi_Y)) &= \cos\phi_X\cos\phi_Y - \sin\phi_X\sin\phi_Y \\
&= \frac{a^2\cos\alpha\sin\alpha}{H_X H_Y} - \frac{b^2\sin\alpha\cos\alpha}{H_X H_Y} \\
&= \frac{(a^2-b^2)\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}} \\
&= R_{XY}
\end{aligned}
$$

となり，相関係数と一致しました．

下図は，$a=1$，$b=0.268$ および $\alpha=30$ 度の場合における各変数の変化図です．



変数 X, Y の振幅と位相はそれぞれ $H_x=0.876$，$H_Y=0.551$，$\phi_X=8.79°$，$\phi_Y=24.90°$，また，位相差は $\phi_X+\phi_Y=33.69°$ となり，振幅と位相の値は各々ベクトルの長さと角度の値と一致しています．

２つのベクトルの長さと角度がそれぞれ等しい時の回転角 α

（その２）の結果によると，45 度回転の楕円の場合は，２変数間におけるベクトルの長さと三角関数の振幅がそれぞれ等しく，また，ベクトルの角度と三角関数の位相もそれぞれ等しくなりました．さらに，（その４）では，45 度回転の楕円の場合は２変数の標準偏差が等しくなることがわかりました．そこで，2 変数が等しい時の α 値を求めるため，ベクトルを例に検討してみます．

まず，２つのベクトルの長さが等しい時の α 値を求めてみます．

$$|P| = |Q|$$
$$\sqrt{(a\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2} = \sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (-b\cos\alpha)^2}$$
$$a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$\left(a^2 - b^2\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$$
$$\left(a^2 - b^2\right)\cos 2\alpha = 0$$

したがって，$\cos 2\alpha = 0$ の時，２つのベクトルの長さが等しくなります．三角関数の振幅についても同じ結果が得られます．さらに，標準偏差については，数式に定数がかかりますが，やはり同じ結果となります．

次に，２つの角度が等しい時の α 値を求めてみます．

$$\cos\gamma_P = \cos\gamma_Q$$
$$\frac{a\cos\alpha}{|P|} = \frac{a\sin\alpha}{|Q|}$$
$$a\cos\alpha\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (-b\cos\alpha)^2} = a\sin\alpha\sqrt{(a\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2}$$
$$a^2\cos^2\alpha(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) - a^2\sin^2\alpha(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) = 0$$
$$a^2b^2\left\{(\cos^2\alpha)^2 - (\sin^2\alpha)^2\right\} = 0$$
$$a^2b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$
$$a^2b^2\cos 2\alpha = 0$$

この場合も，$\cos 2\alpha = 0$ の時に，２つのベクトルの角度が等しくなっています．三角関数の位相についても同じ結果が得られます．

このように，$\cos 2\alpha = 0$ の場合はベクトルと三角関数の 2 変数における長さと振幅および角度と位相がそれぞれ等しくなり，相互に完全に対応しています．また，長さと振幅に関しては，2 変数の標準偏差が等しくなることと密接に関連していることが示唆されます．