楕円の相関係数（その４）

nino

2017 年 7 月 10 日

これまで３回にわたり，楕円の回転角が 45 度の場合における相関係数や回帰係数などについて紹介しました．今回からは，任意の回転角の場合について調べていきます．最初に，回転角 α における相関係数の導出とその微分について考察します．

回転角 α の楕円の相関係数 $R(\alpha)$

（その１）でも示しましたが，まず，相関係数 $R(\alpha)$を導出するための準備をします．
楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ の媒介変数は $x_i=a\cos\theta_i$，$y_i=b\sin\theta_i$ であり，左 α 度回転させた楕円 $(X_i,\ Y_i)$は，

$$X_i = x_i\cos\alpha - y_i\sin\alpha$$
$$Y_i = x_i\sin\alpha + y_i\cos\alpha$$

で表されます．また，変数は三角関数なので，$\theta_i=2\pi\,(i/\mathrm{n})$とすると，１周期分すなわち 0 から 2π の範囲を考えれば良く，次式が成立します．

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i = \sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i = 0$$

これより，変数 X_i，Y_i の平均値はいずれも 0 になります．

したがって，回転角 α における楕円 X_i, Y_i の共分散 S_{XY} および X_i, Y_i の標準偏差 S_X, S_Y は，次のようにまとめられます．

$$\begin{aligned}
S_{XY} &= \frac{1}{n}\sum X_iY_i \\
&= \frac{1}{n}\sum(x_i\cos\alpha - y_i\sin\alpha)(x_i\sin\alpha + y_i\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{n}\sum(a\cos\theta_i\cos\alpha - b\sin\theta_i\sin\alpha)(a\cos\theta_i\sin\alpha + b\sin\theta_i\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{n}\sum\left\{\cos\alpha\sin\alpha\left(a^2\cos^2\theta_i - b^2\sin^2\theta_i\right) + ab\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\sin\theta_i\cos\theta_i\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum\left\{\cos\alpha\sin\alpha\left(a^2\left[\frac{1+\cos2\theta_i}{2}\right] - b^2\left[\frac{1-\cos2\theta_i}{2}\right]\right) + ab\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\frac{\sin2\theta_i}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2n}\sum\left\{\left(a^2 - b^2\right)\cos\alpha\sin\alpha\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2 - b^2\right)\cos\alpha\sin\alpha \\
&= \frac{(a^2 - b^2)\sin2\alpha}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_X &= \sqrt{\frac{\sum X_i{}^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(a\cos\theta_i\cos\alpha - b\sin\theta_i\sin\alpha\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(a^2\cos^2\theta_i\cos^2\alpha - 2ab\cos\theta_i\sin\theta_i\cos\alpha\sin\alpha + b^2\sin^2\theta_i\sin^2\alpha\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left\{a^2\cos^2\alpha\left(\frac{1+\cos 2\theta_i}{2}\right) + b^2\sin^2\alpha\left(\frac{1-\cos 2\theta_i}{2}\right)\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2n}\sum\left(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}}
\end{aligned}
$$

同様にして，

$$
\begin{aligned}
S_Y &= \sqrt{\frac{\sum Y_i^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(a\cos\theta_i\sin\alpha + b\sin\theta_i\cos\alpha\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}}
\end{aligned}
$$

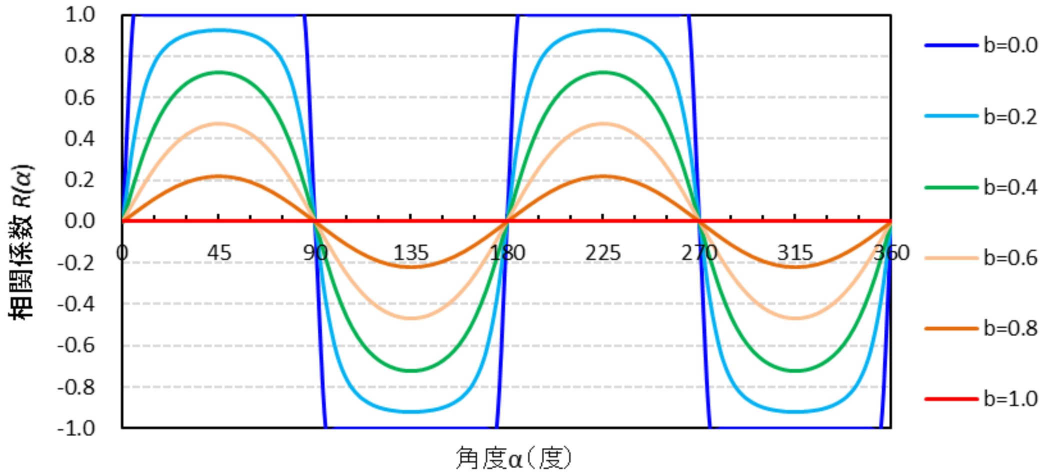
したがって，回転角 α における楕円の相関係数 $R(\alpha)$ は

$$
\begin{aligned}
R(\alpha) &= \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} \\
&= \frac{(a^2-b^2)\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\left(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right)\left(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\right)}} \\
&= \frac{(a^2-b^2)\tan\alpha}{\sqrt{\left(a^2+b^2\tan^2\alpha\right)\left(a^2\tan^2\alpha + b^2\right)}}
\end{aligned}
$$

あるいは，次式で表せます．

$$
\begin{aligned}
R(\alpha) &= \frac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}\left\{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\cos 2\alpha\right\}}} \\
&= \frac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}}}
\end{aligned}
$$

相関係数 $R(\alpha)$の α に対する変化を見てみます．
下図は，a＝1.0（固定）とした場合の各 b 値における相関係数 $R(\alpha)$の変化を示したものです．



相関係数はいずれの b 値でも極大と極小が 180 度ごとに繰り返されています．例えば，α が 45 度付近で相関係数は極大，α が 135 度付近では極小となっています．極大と極小はそれぞれ正負に対応しています．

相関係数 $R(\alpha)$の微分

相関係数 $R(\alpha)$の極大と極小の時の α 値を確認するため，その微分 $d\{R(\alpha)\}/\ d\alpha=0$ を求めます．相関係数 $R(\alpha)$ は分数式です．

$$R(\alpha)=\frac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{\sqrt{\left\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right\}}}$$

分数式 $h(\alpha)$／$g(\alpha)$の微分は，$h(\alpha)$と $g(\alpha)$の微分をそれぞれ $h(\alpha)$と $g(\alpha)$'とすると，

$$d\left[\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)}\right]/\,d\alpha=\frac{h'(\alpha)g(\alpha)-h(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}$$

ですから，まず，分母 $g(\alpha)$の微分 $g(\alpha)$'を求めます．

$$\frac{\left[\sqrt{\left\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right\}}\right]}{d\alpha}=\frac{-(a^2-b^2)(2\cos 2\alpha)(-2\sin 2\alpha)}{2\sqrt{\left\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right\}}}$$

$$=\frac{2(a^2-b^2)(\cos 2\alpha)(\sin 2\alpha)}{\sqrt{\left\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right\}}}$$

これを用いると，$d\{R(\alpha)\}/d\alpha$ は次式となります．

$$\frac{d\{R(\alpha)\}}{d\alpha}=(a^2-b^2)\frac{2\cos 2\alpha\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}-\sin 2\alpha 2\left(a^2-b^2\right)\left(\cos 2\alpha\right)\left(\sin 2\alpha\right)}{\left[\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}}\right]^3}$$

$$=(a^2-b^2)\frac{2\cos 2\alpha\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}-2\left(a^2-b^2\right)\left(\cos 2\alpha\right)\left(\sin^2 2\alpha\right)}{\left[\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}}\right]^3}$$

$$=(a^2-b^2)\frac{2\cos 2\alpha\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)\right\}}{\left[\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}}\right]^3}$$

$$=\frac{2(a^2-b^2)\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\right\}}{\left[\sqrt{\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\cos^2 2\alpha\right\}}\right]^3}\cos 2\alpha$$

ここで，$d\{R(\alpha)\}/d\alpha=0$ とおくと，$\cos 2\alpha=0$ が得られます．$m=0, 1, 2,$ ・・とすると，

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}+m\pi \qquad \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{m}{2}\pi$$

となります．したがって，相関係数 $R(\alpha)$ の極大は，

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+m\pi$$

の時であり，その値は $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ となります．また，極小は，

$$\alpha=\frac{3\pi}{4}+m\pi$$

の時に，$-(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ となります．

（その１～３）で考察したのは，これらのうちの $\alpha=45$ 度（$\pi/4$）の時の結果です．すなわち，相関係数 $R(\alpha)$ が極大（正）の場合についてのものです． また，この時は，標準偏差 S_X と S_Y は等しくなるという特性があります．

一般的に，散布図における分布の傾きによる相関係数の変化は，分布が第１と第３象限に存在すると相関係数はプラスに寄与し，第２と第４象限に存在するとマイナスに寄与すること，そして，回帰直線の傾きが 45 度($\pi/4$)では後２者の寄与が最小となり相関係数がプラスで最大となることが指摘されています．

今回得られた結果は，このことを具体的に示しています．なお，回帰直線の傾きが 135 度($3\pi/4$)では相関係数がマイナスで最大となります．

先述したように，相関係数が極大・極小となる $\cos 2\alpha=0$ の時，標準偏差 S_X と S_Y は等しくなります．このことについては，次回に，ベクトルと三角関数を通して考察します．