楕円の相関係数（その３）

nino

2017 年 7 月 1 日

これまでに，左 45 度回転の楕円（長軸：a，短軸： b）の相関係数は $R=(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$で表されることなどを示しました．ここでは，楕円の相関係数に関連して回帰式および焦点と離心率について調べてみます．

回転楕円の回帰式

「楕円の相関係数（その１）」で得られた結果をもとに，回転楕円の回帰式 $Y_i=AX_i+B$ の回帰係数 A と切片 B を求めます．共分散を S_{XY}，分散を S_{XX}とすると，A と B は，

$$A=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$
$$B=\overline{Y}-A\overline{X}$$

で表されます．回帰係数 A に $S_{XY}=(a^2-b^2)／4$，および $S_{XX}=S_X{}^2$（標準偏差 S_X の 2 乗）$=(a^2+b^2)／4$ を代入すると，

$$A=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$
$$=\frac{\{(a^2-b^2)/4\}}{\{(a^2+b^2)/4\}}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

このように，回帰係数 A は相関係数 R_{XY} と一致しました．

別解として，次のように導くこともできます．
（その１）で示しましたが，S_X と S_Yはともに，

$$S_X=S_Y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

で等しいので，$S_{XX}=S_XS_Y$ となります．それを回帰係数の式に代入すると，

$$A=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$
$$=\frac{S_{XY}}{S_XS_Y}$$
$$=R_{XY}$$

となり，回帰係数と相関係数は一致します．

ちょっと不思議な結果が得られましたが，これは回転角が左 45 度の楕円の場合です．回転角が 45 度以外の場合は任意の回転角に依存して，相関係数や回帰係数は変化します．なお，変数 X_i，Y_i の平均値はいずれも 0 なので，切片 B は 0 となります．

$$B = \overline{Y} - A\overline{X} = 0$$

相関係数と焦点および離心率の関係

楕円の焦点 c は，

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

で定義されます．相関係数の分子は焦点の 2 乗に等しくなります．
したがって，相関係数は，焦点 c を用いると，

$$R_{XY} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

となり，焦点は次式で表されます．

$$c = \pm\sqrt{R_{XY}\left(a^2 + b^2\right)}$$

一方，離心率は，

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

で定義されます．b について整理すると

$$b = \pm a\sqrt{1 - e^2}$$

が得られます．これを相関係数の式に代入すると，

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 - a^2\left(1 - e^2\right)}{a^2 + a^2\left(1 - e^2\right)} \\ &= \frac{e^2}{2 - e^2} \end{aligned}$$

となります．また，上式を変形すると，次式が得られます．

$$e = \sqrt{\frac{2R_{XY}}{1 + R_{XY}}}$$

この式から，相関係数から離心率が求められることがわかります．
これらの関係も，楕円の回転角が左 45 度の場合の結果です．

これまでは，左 45 度回転楕円の相関係数について展開してきましたが，次回以降は，任意の回転角における相関係数の導出と左 45 度回転の意味などについて考察します．