楕円の相関係数（その２）

nino

2017 年 6 月 20 日

（その１）では，共分散と標準偏差を用いて楕円の相関係数を求めました．今回は，ベクトルおよび三角関数の合成公式を用いて相関係数を導出します．

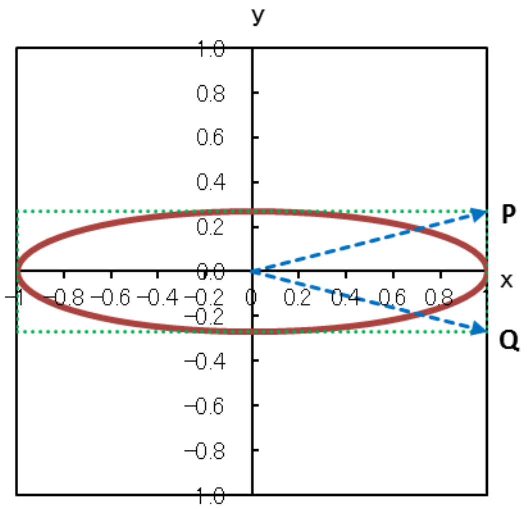
楕円の相関係数のベクトル表示

左 45 度回転の楕円（長軸：a，短軸：b）の相関係数は $R=(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ で表されました．この式は次のように書き換えることができます．

$$R_{XY}=\frac{aa+b(-b)}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+(-b)^2)}}$$

この式から，分子はベクトル P(a，b) とベクトル Q(a，$-b$) の内積，分母はそれぞれのベクトルの長さの積とみなせます．

次図は，楕円曲線（長軸：$a=1$，短軸：$b=0.268$）に，原点からのベクトル P(1，0.268) および Q(1，－0.268) を書き加えたものです．



ベクトルの内積の定義から，∠P0x＝∠Q0x＝γ とすると，

$\cos 2\gamma = \mathrm{P}\cdot\mathrm{Q}/|\mathrm{P}||\mathrm{Q}|$

が成り立ちます．２つのベクトルのなす角度のコサインは相関係数であり，共分散と標準偏差から求めた回転楕円の相関係数と一致します．式に $a=1$, $b=0.268$ を代入すると，$\cos 2\gamma=0.866$ すなわち $2\gamma=30$ 度が得られます．このように，共分散による回転楕円の相関係数をベクトル表示すると，相関係数の角度の意味がわかります．

三角関数の合成公式から楕円の相関係数の導出

（その１）でも書きましたが，楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ の媒介変数は $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ であり，その回転楕円 X, Y は，

$$X = 1/\sqrt{2}(a\cos\theta - b\sin\theta)$$
$$Y = 1/\sqrt{2}(a\cos\theta + b\sin\theta)$$

となります．一方，三角関数の合成公式は，

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta + \phi)$$
$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \phi)$$

で表されます．ここで，ϕは次のとおりです．

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

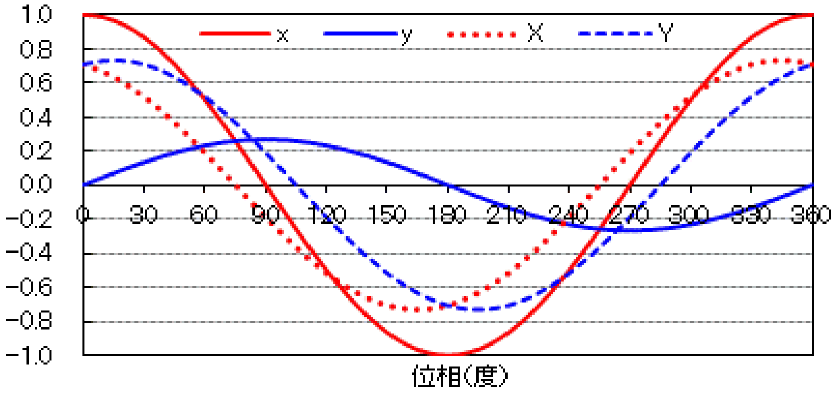
三角関数の合成公式を用いると，回転楕円の式は次のようにまとめられます．

$$X = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\cos(\theta + \phi)$$
$$Y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\cos(\theta - \phi)$$

変数 X,Y の振幅は同じ値，位相差は 2ϕ となります．前述のベクトルでは，２つのベクトルのなす角度 2γ のコサインが相関係数でした．そこで，位相差 2ϕ のコサインを倍角の公式を用いて求めると，

$$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$$
$$= 2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

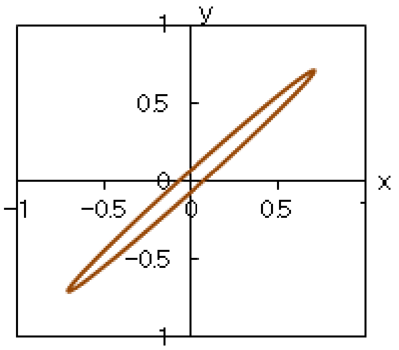
となり，ベクトルによる相関係数と一致しました．また，$2\gamma = 2\phi$ が成立しますので，ベクトルの角度と三角関数の位相差は等しいことがわかります．
例えば，a＝1，b＝0.268 の場合における各三角関数の変化について見てみます．



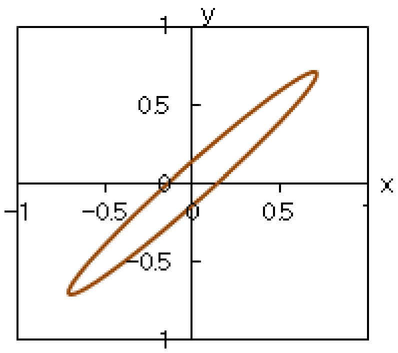
変数 x，y の振幅はそれぞれ $a=1$，$b=0.268$，そしてそれらの位相差は 90 度ですが，回転楕円の変数 X,Y では振幅はともに 0.732 で等しく，位相差は 30 度となります．位相差を用いると，それぞれの相関係数として 0（＝cos90°）と 0.866（＝cos30°）が得られます．
これまでのことから，xy 座標で楕円を左 45 度回転させることは，三角関数では２変数の振幅を等しくさせるとともに，それに対応して位相も変化していることを意味しています．また，楕円の相関係数という視点でみると，共分散・ベクトル・三角関数は相互に密接に関連していることが示唆されます．

相関係数と *b/a* 値の関係

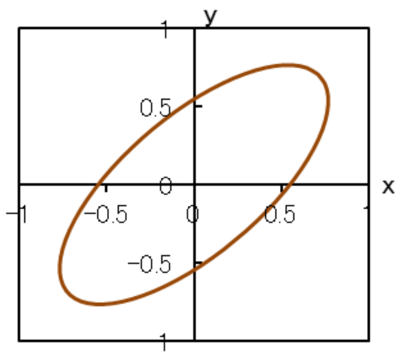
楕円の相関係数と b/a 比（y 軸方向の変動幅）等の関係を理解するため，各 b/a 比に対応した楕円曲線とその相関係数 R およびベクトルの角度 2γ（あるいは三角関数の位相差）について調べてみました．
下図は，b/a 比が 0.05，0.10，0.42 の３つの場合について例示したものです．



（1）$b/a=0.05$
$R=0.995$，$2\gamma=2.9°$



（2）$b/a=0.10$
$R=0.980$，$2\gamma=5.7°$



（3）$b/a=0.42$
$R=0.700$，$2\gamma=22.8°$

一般的に，相関係数が 0.7 以上は相関が高いと評価されますが，相関係数が 0.980 と 0.700 では，変動幅は後者のほうが 4.2 倍（＝0.42／0.10）大きくなります．
ただし，実測値に適用する場合は，分布の形が楕円状であるか，異常値や誤差が影響していないかなどを考慮して判断する必要があります．