

# 多変数解析への誘い デカルトの葉線と陰関数定理

上野孝司

2017年8月10日

概要

## 多変数解析への誘い デカルトの葉線と陰関数定理

### 1. 多変数解析への第一歩 写像の微分

高校までの解析学は、通常の微分積分学として実一変数の解析、すなわち、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を扱う。 $f(x) = x^n + x^{n-1} + 1, f(x) = \sin \frac{1}{x}, \log x$  などなど。。微分積分学は実一変数の関数だけでも実に様々な問題を提起し、その歴史も長い。これに対して、大学での解析学（複素解析を除く）は、多変数の写像、 $n$  変数から  $m$  変数への関数（写像）： $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を扱い一気に複雑化して表記だけでも混乱してしまう。だから、大学初年級では、 $z = f(x, y)$  など  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}$  などに限定して議論の方が望ましいとの見方もある。実際、『解析概論』（高木貞治）では、 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  などで具体的記述が展開されており、その内容とともに教育的配慮などから不朽の名著と言われる所以である。これに対して、『解析入門』（杉浦光夫）は  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の一般論が完結的に展開されており、これもまた定評がある。ただ、表記がやや煩雑であり教育効果から考えると大学の教養学部や大学1、2年までの解析学としてはやや敷居が高いように筆者は思っている（この書物は東京大学教養学部、駒場での授業に基づいている）。 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の一般論を終始貫くことは、ブルバキなどの構造主義の潮流が一時流行したことなどを背景としながら全盛期を極めたものの、一見して無味乾燥な様相を呈するとの見方もあるだろう。

だが、 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  と一般化して初めて見えてくるものがある。例えば、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の実一変数関数の微分は、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と解析的に定義されるが、“微分係数”との表記が示唆するように、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の微分は、 $m \times n$  行列  $M$  で定義され、*Jacobi*(ヤコービ) 行列と呼ばれる。つまり、

微分係数  $\leftrightarrow m \times n$  行列

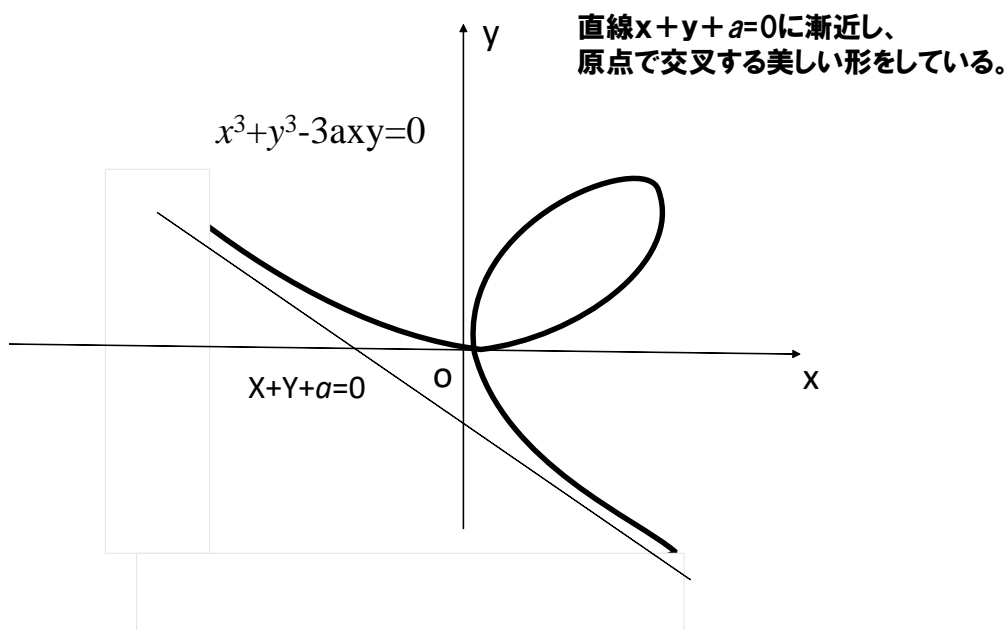
という対応が導かれ、ここに解析学と線形代数が一体化する。これも一見、単なる構造的な表現のみとの見方をする学習者もおられるかも知れないが、多次元化して初めて本質が見えてくるものがある。それを示す具体的事例が、*Jacobian*(ヤコビアン、 $M$  の行列式  $\det M$ ) であり、その威力はすさまじいものがある。実際、 $\det M = J$  を考えることで初めて構造的に導出される代表的事例が多重積分の変数変換の応用であり、 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  (ガウス積分) や  $n$  次元球の体積の導出などであり、 $J$  の導入で一気に解決されるのである（別

稿『恐るべし、数学技術 ガウス積分とパーゼル問題』、『N次元超球体積はヤコビアン、曲面積は平行四辺形』参照)

## 2. デカルトの葉線

話が抽象化したので、具体的事例をあげて述べよう。

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$  はどのような形をしているのだろうか。  $f = 0$ , つまり、 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  の解の集合(零点集合)は、下図のような形をしており、デカルトの葉線と呼ばれている。



(注) デカルトの葉線は、 $t$  を媒介変数として、

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3} (a > 0)$$

で表すことができる。本稿では、多変数の一般論の初歩を展開してそれに基づいて、 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$  の極値(点)や特異点などを示そう。

## 3. 多変数解析学の初歩

いま、 $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $S$  から  $m$  次元空間  $\mathbb{R}^m$  への写像

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) (x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

が与えられたとする。各関数  $f_k(x)$  が集合  $S$  で微分可能なとき、写像  $f$  は集合  $S$  で微分可能であるという。

$$f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_m)$$

また、各関数  $f_k(x)$  が集合  $S$  で  $C^1$ -関数(導関数が連続)であるとき、写像  $f$  を集合  $S$  上の  $C^1$ -写像( $C^1$ 級の写像)という。微分可能な写像  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$  が与えられたとき、 $n \times m$  個の偏導関数

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} (1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

がつくられる。この  $n \times m$  個の偏導関数を組み合わせて、 $(m, n)$  行列

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

をつくり、この行列を写像  $f$  の *Jacobi* (ヤコービ) 行列という。

写像  $f$  の *Jacobi* 行列  $Df$  の各成分の点  $a \in S$  において取る値を考える。この行列を

$$M = Df(a) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right) = (\alpha_{kj})$$

とすると、微分可能な写像  $f$  の  $k$  番目の成分  $f_k(x)$  に対して

$$f_k(a+h) - f_k(a) = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j + \eta_k$$

とかける。ただし、 $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\eta_k|}{\|h\|} = 0$  である。したがって

$$f(a+h) - f(a) = Mh + \eta$$

と表せる。ただし、 $\eta = {}^t(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  であり、

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\eta\|}{\|h\|} = 0$$

である。

特に、 $n = m$  のときは、*Jacobi* 行列  $Df = M$  は  $n$  次正方行列であるが、その行列式  $\det M = \det(Df)$  が考えられる。この行列式

$$\det M = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

を写像  $f$  のヤコビアン (*Jacobian*) という。

[例 1] 平面極座標

直交座標を持つ  $x-y$  平面  $\mathbb{R}^2$  において、点  $P=(x, y)$  を表すのに、原点  $O$  と点  $P$  の間の距離  $r = OP$  と線分  $OP$  と  $x$  軸のなす角  $\theta$  が与えられると、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

と表せる。ここで、 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  である。この式は、 $\mathbb{R}^2$  の部分集合

$[0, +\infty) \times [0, 2\pi) = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  から平面  $\mathbb{R}^2$  への写像  $g$  と考えられる。このと

き、*Jacobi* 行列は

$$Dg = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

である。したがって、ヤコビアンは、

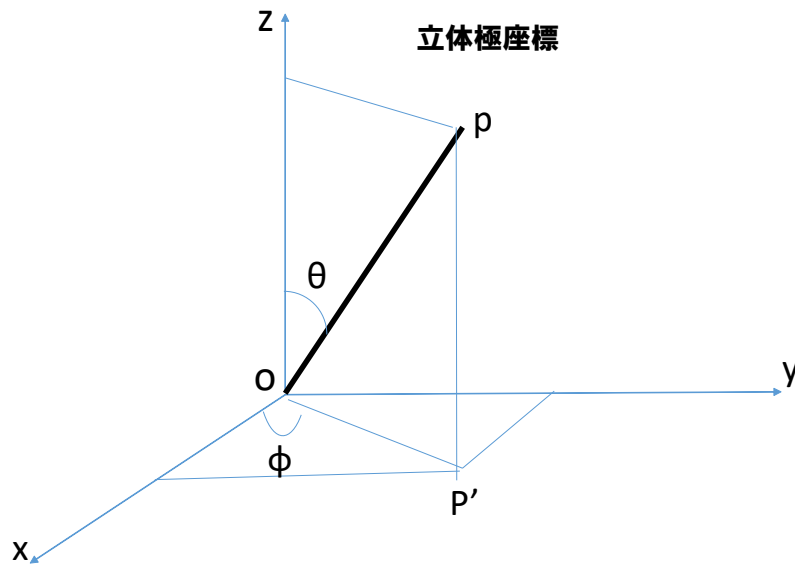
$$J(g) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

[例 2] 立体極座標

直交座標を持つ空間  $\mathbb{R}^3$  において、点  $P = (x, y, z)$  と原点  $O$  の間の距離  $r = OP$  と、線分  $OP$  と  $z$  軸のなす角度  $\theta$ 、および点  $P$  の  $(x, y)$  平面への正射影を  $P'$  とするとき線分  $OP'$  と  $x$  軸のなす角度  $\varphi$  が与えられると、

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

により、点  $P = (x, y, z)$  は表される。



これを  $r - \theta - \varphi$  空間から  $x - y - z$  空間への写像  $g$  と考えると、

$$Dg = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

ヤコビアンに関しては、

$$\begin{aligned} J(g) &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \sin \theta \cos \varphi (r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi) + \sin \theta \sin \varphi (r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi) \\ &\quad + \cos \theta (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

\* 極値

次に写像  $f = f(x, y)$  の極値を考えよう。

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + R \quad \left( R = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\theta x) x^k \right) (\theta \in (0, 1))$$

なるマクローリン展開を前提として、多変数関数のテイラー展開を考える。2変数関数の場合を考える。平面  $\mathbb{R}^2$  の開部分集合  $S$  上の  $C^n$ -関数  $f(x, y)$  を考える。 $(a, b) \in S$  とする。 $(a + h, b + k) \in S$  となるとき、値  $f(a + h, b + k)$  を考えるのが問題である。 $t \in [0, 1]$  に対して

$$\Phi(t) = f(a + th, b + tk)$$

とおくと、 $\Phi$  は区間  $[0, 1]$  上の  $C^n$ -関数であり、 $\Phi(0) = f(a, b)$ ,  $\Phi(1) = f(a + h, b + k)$  となる。

$$\frac{d\Phi}{dt} = f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k$$

であるから、

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = f_{xx} \cdot h^2 + 2f_{xy} \cdot hk + f_{yy} \cdot k^2$$

を得る。以下、帰納的に

$$\frac{d^\nu \Phi}{dt^\nu} = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu f \cdots \cdot (*)$$

が成立することがわかる。ただし右辺は、

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} h^{\nu-j} k^j \frac{\partial^\nu}{(\partial x)^{\nu-j} (\partial y)^j}$$

と形式的に分解する。上記マクローリン展開により、

$$\Phi(t) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu \Phi}{dt^\nu}(0) t^\nu + R$$

この式に  $(*)$  を代入して  $t = 1$  とおくと、

$$f(a + h, b + k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu f \right] (a, b) + R$$

この式を第3項まで具体的に書くと

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k) + \frac{1}{2!} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \} + \cdots + R$$

となっている。この式を  $\text{grad } f = (f_x, f_y)$  および *Hesse* 行列  $H_f$  を使って書くと、

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ であり、}$$

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + (\text{grad } f) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (h, k) H_f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \cdots + R \cdots \cdot (*)$$

となる。線型代数の表記により、

$$(h, k) H_f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h, k) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

であることに注意。なお、 $R$  は  $\|h\|$  が十分小さいとき、前の3項と比較すると無視できるほど小さい。

なお、上記  $(*)$  を  $n$  変数関数の場合に拡張しておこう。

$f$  を開集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  上の  $C^3$  関数とする。

$x \in (x_1, \dots, x_n) \in S$  および  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  とするとき、

$$f(x + h) = f(x) + (\text{grad } f, h) + \frac{1}{2} H_f [h] + R$$

ここで、 $(\text{grad } f, h)$  は通常の内積を表し、

$$H_f[h] = {}^t h H_f h = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{x_j x_i} h_j h_i$$

$$= [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

点  $a$  が微分可能な関数  $f$  の極大値点あるいは極小値点ならば、

$$\text{grad } f(a) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) = 0$$

である。これは極値点であることの必要条件である。

さて、関数  $f$  は  $C^3$  級であるとする、 $\text{grad}(a) = 0$  のとき、

$B = H_f(a)$  とおくと、

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} B[h] + R$$

ただし、 $B[h] = {}^t h H_f h$

$$= f_{xx} h^2 + 2f_{xy} h k + f_{yy} k^2$$

である。このとき

(a)  $\text{grad}(a) = 0$  であり、任意の  $h \neq 0$  に対して

$$B[h] > 0$$

ならば、点  $a$  は関数  $f$  の極小値である。

(b)  $\text{grad}(a) = 0$  であり、任意の  $h \neq 0$  に対して

$$B[h] < 0$$

ならば、点  $a$  は関数  $f$  の極大値である。

という判定法が成立する。

\* 特異点、通常点

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

に対して

$$(1) f(a, b) = 0, \text{grad } f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0)$$

となるような点  $(a, b)$  を零点集合  $f(x, y) = 0$  の通常点という。

$$(2) f(a, b) = 0, \text{grad } f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) = (0, 0)$$

となるような点  $(a, b)$  を零点集合  $f(x, y) = 0$  の特異点という。

特異点  $(a, b)$  の近傍における  $f(x, y) = 0$  の様子はそれぞれの場合に応じて調べなければならない。特異点の近傍における  $f(x, y) = 0$  の様子でいろいろな名前がつけられている（孤立点、交叉点等）。

#### 4. 再びデカルト葉線

3の内容を  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy (a > 0)$  に適用してみよう。

(1) 極値

$$\text{grad } f = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax)$$

であるから、 $\text{grad } f = 0$  より、 $(x, y) = (0, 0)$  または  $(a, a)$  を得る。

Hesse 行列  $B$  は、

$$B = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

であり、

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3ay) = 6x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3ay) = -3a$$

$$f_{yx} = -3a$$

$$f_{yy} = 6y$$

であるから

$$B = \begin{bmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{bmatrix}$$

となる。これより、

\*  $x = y = 0$  のとき、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、

$$(h, k)B \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \\ = -6ahk$$

となり、 $(h, k)$  の取り方により、 $B[h]$  は正にも負にもなる。したがって、 $(0, 0)$  は極値点ではない。

\*  $x = y = a$  のとき

$$B = \begin{bmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{bmatrix}$$

であるから

$$(h, k)B \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 6ah^2 + 2(-3a)hk + 6ak^2 \\ = 6a(h^2 - hk + k^2)$$

であり、 $(h, k) \neq (0, 0)$  ならば、 $B \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} > 0$  である。

すなわち、点  $(a, a)$  は  $f$  の極小値点であり、 $f(a, a) = -a^2$  は  $f$  の極小値である。

(2) 特異点

$$f_x = 3x^2 - 3ay$$

$$f_y = 3y^2 - 3ax$$

条件  $(f_x, f_y) = (0, 0)$  より、

$$x = y = 0 \text{ または } x = y = a \text{ を得る。}$$

$f(0, 0) = 0$  であるから点  $(0, 0)$  は  $f(x, y) = 0$  の特異点である。一方、 $f(a, a) = -a^2$  だから、

$f(x, y) = 0$  の特異点は、 $(0, 0)$  のみである。

(3) デカルト葉線で囲まれる面積

次に、少々、多変数関数論の趣旨とは異なるが、デカルトの葉線で囲まれる図の面積をみてみよう。以下の2つの図の面積を考えてみる。

(1) . 第1象限の部分の図の面積

(2) . 第 2 象限、第 4 象限と  $x + y + a = 0$  で囲まれる部分の面積

興味深いことに、(1) と (2) の面積は等しいことが知られている。以下、これを証明しよう。

一般に極座標で、曲線  $r = f(\theta)$  と 2 直線  $\theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha \leq \beta)$  で囲まれた図形の面積  $S$  は、

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

となることが成り立つ。

(1) の面積

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ とおくと}$$

$$r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta - 3ar^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \tan^3 \theta)'}{(1 + \tan^3 \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{3a^2}{2} \left[ -\frac{1}{1 + \tan^3 \theta} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3a^2}{2} \left( \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} \frac{1}{1 + \tan^3 \theta} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d \tan \theta}{d\theta} = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ に注意せよ} \right)$$

(2) の面積

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{-a}{\cos \theta + \sin \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right)^2 \right\} d\theta + \frac{a^2}{2} \\ &= a^2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left\{ \left( \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \right)^2 - \left( \frac{9 \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right)^2 \right\} d\theta + \frac{a^2}{2} \\ &= a^2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} - \frac{9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2} \right\} d\theta + \frac{a^2}{2} \\ &= a^2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta (1 + \tan \theta)^2} - \frac{9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^6 \theta (1 + \tan^3 \theta)^2} \right\} d\theta + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $t = \tan \theta$  とおくと、 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  より、



$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta (1 + \tan \theta)^2} - \frac{9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^6 \theta (1 + \tan^3 \theta)^2} \right\} \cos^2 \theta dt + \frac{a^2}{2} \\
&= a^2 \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{(1 + \tan \theta)^2} - \frac{9 \tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \right\} dt + \frac{a^2}{2} \\
&= a^2 \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{9t^2}{(1+t^3)^2} \right\} dt + \frac{a^2}{2} \\
&= a^2 \left[ -\frac{1}{1+t} + \frac{3}{1+t^3} \right]_{-1}^0 + \frac{a^2}{2} \\
&= a^2 \left[ -\frac{(t+1)(t-2)}{(1+t)(1-t+t^2)} \right]_{-1}^0 + \frac{a^2}{2} \\
&= \frac{3}{2} a^2
\end{aligned}$$

よって、図形 (1) と (2) の面積は等しい。

## 5. 陰関数定理

次に多変数解析の初歩としてよく出てくる陰関数定理について述べる。まず、 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  について述べたあと  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  に一般化する。

【陰関数定理】開集合  $S \subset \mathbb{R}^2$  上の  $C^1$ -関数  $f$  が与えられたとする。  $f(a, b) = 0$  であるとする。このとき、  $f_y(a, b) \neq 0$  ならば、点  $a \in \mathbb{R}$  の近傍  $G$  で定義された関数  $\varphi(x)$  で、次の条件を満たすものが存在する。

(1)  $\varphi(a) = b$

(2) 点  $(a, b) \in S$  の近傍  $U$  を適当にとると、任意の  $x \in G$  に対して、  $f(x, \varphi(x)) = 0$  である。

(3)  $\varphi(x)$  は  $C^1$ -関数であり、導関数に関して、  $x \in G$  のとき

$$\frac{d\varphi}{dx} = -f_x/f_y = -f_x(x, \varphi(x))/f_y(x, \varphi(x))$$

[証明]  $f_y(a, b) > 0$  であると仮定する。偏導関数  $f_y$  の連続性より、点  $(a, b)$  の近傍  $U \subset S$  があり、任意の  $(x, y) \in U$  に対して、

$$f_y(x, y) > 0$$

となる。このことは、 $x$  を固定すると、関数  $f$  は  $y$  の関数として狭義単調増大であることを示している。特に、  $f(a, b) = 0$  であるから、  $x = a$  と固定して考えると、  $f(a, c) < 0$  および  $f(a, d) > 0$  となるような点  $(a, c) \in U$  および  $(a, d) \in U$  が存在する。関数  $f(x, c)$  および  $f(x, d)$  は、  $x$  の関数として連続関数であるから、点  $a \in \mathbb{R}$  の近傍  $G = (a_1, a_2)$  が存在して、  $x \in G$  のとき、  $f(x, c) < 0, f(x, d) > 0$  となる。  $x \in G$  を固定すると、  $f(x, y)$  は  $y$  に関して単調増大な連続関数だから、中間値の定理より、  $f(x, y) = 0$  となるような点  $y \in (c, d)$  がただ一つ存在する。この点  $y$  を  $y = \varphi(x)$  と書くと、明らかに、  $f(x, \varphi(x)) = 0$  であり、また  $\varphi(a) = b$  である。

次に、  $x$  および  $x + h \in G$  であるとする。さて、  $\varphi(x) = y$  および  $\varphi(x + h) = y + k$  と書くと、  $f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0$  である。一方、平均値の定理により、ある  $\theta \in (0, 1)$  があり、

$$0 = f_x(x + \theta h, y + \theta k)h + f_y(x + \theta h, y + \theta k)k$$

を得る。この式は、  $f_y \neq 0$  であるから、  $h \rightarrow 0$  のとき  $k \rightarrow 0$  であることを示している。一方、

$$\frac{1}{h}(\varphi(x + h) - \varphi(x)) = \frac{k}{h} = -f_x(x + \theta h, y + \theta k)/f_y(x + \theta h, y + \theta k)$$

であるから、偏導関数の連続性を使えば、(3) が成立する。■

このようにして得られた関数  $y = \varphi(x)$  を条件  $f(x, y) = 0$  から得られる陰関数という。

次に陰関数定理を一般次元に拡張しよう。簡単のために、少し記号を変える。

集合  $T$  は、 $(r + m)$  次元空間  $\mathbb{R}^{r+m}$  の開部分集合とし、 $T$  の点を一般に

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m)$$

と表す。集合  $T$  から  $m$  次元空間  $\mathbb{R}^m$  の中への  $C^1$ -写像  $f$  が

$$f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$$

によって与えられたとする。仮定により、各関数  $f_j$  は微分可能であり、その偏導関数は連続である。この写像  $f$  の零点集合  $N_f$  は、 $N_f = \{(x, y) \in T : f(x, y) = 0\}$

【陰関数定理 (多変数版)】写像  $f$  は前記の通りとし、 $(a, b) \in N_f$  であるとする。行列

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad ((x, y) = (a, b))$$

が正則行列、すなわち、 $\det M \neq 0$  を満たすならば、点  $a$  の  $\mathbb{R}^r$  における近傍  $A$ 、点  $b$  の  $\mathbb{R}^m$  における近傍  $B$ 、および  $A$  から  $B$  への  $C^1$ -写像  $\varphi$  が存在し、 $A \times B \subset T$  であり、さらに、

$$N_f \cap (A \times B) = \varphi$$

が成立する。ただし、 $\varphi$  は写像  $\varphi$  のグラフ  $\{(x, \varphi(x)) : x \in A\}$  である。さらに、この写像  $\varphi$  の Jacobi 行列  $D\varphi$  に関して

$$D\varphi(x) = -M(x, y)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_r} \end{bmatrix}$$

が成立する。ただし、 $x \in A$  である。■

この定理の意味は、点  $(a, b)$  が方程式

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = \dots = f_m(x, y) = 0$$

を満たすとき、定理の条件が成立しているならば、この方程式が

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, \dots, x_r) \\ \dots \\ y_m = \varphi_m(x) = \varphi_m(x_1, \dots, x_r) \end{cases}$$

という形に、点  $a$  の近傍で解けるということである。

[証明] 証明は煩雑だが、本質的に2変数の場合と同様なので概略を述べる。アイデアは、 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  の場合と同様に平均値の定理を用いる。

上記の文脈で得られた  $\varphi$  が  $C^1$ -写像であることを示す。 $x, x+h \in A$  に対して、 $y = \varphi(x)$ 、および  $\varphi(x+h) = y+k$  とおくと、

$$f_j(x+h, y+k) - f_j(x, y) = 0$$

となっている。この式の左辺に平均値の定理を使うと、

$$\sum_{\alpha=1}^r h_\alpha \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha}(x + \theta_j h, y + \theta_j k) + \sum_{\beta=1}^m k_\beta \frac{\partial f_j}{\partial y_\beta}(x + \theta_j h, y + \theta_j k) = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

となる  $\theta_j$  が存在することがわかる。上記の式は以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = 0$$

この式より、

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = -M^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix}$$

と書け、結果の式を得る。■

\* 本稿の執筆に際しては、以下を参考とした。

- ・ 解析学入門 (田坂隆士、秀潤社)
- ・ 解析入門 (杉浦光夫、東京大学出版会)
- ・ 解析概論 (高木貞治、岩波書店)