金融工学：ポートフォリオのリスク評価は共分散ー資産選択理論

上野孝司

2016 年 12 月 5 日

概要

ファイナンス数学：ポートフォリオのリスク評価は共分散−−−資産選択理論概論

１．金融資産のリスク・リターン

本稿では、金融資産の価格変動リスクの計量的な評価方法について述べる。通常、金融投資行動の対象は株、不動産、債券、通貨、商品など広く分散投資を行うことが考えられる。これらの複数の投資対象はまとめてポートフォリオと呼ばれている。投資が単一の企業の株式ならば、そのリスクはその株式のみの価格変動リスクに限定されるのでリスク評価は比較的簡単だが、投資が複数の金融資産にわたるときは、そのポートフォリオのリスクは分散される一方でその評価方法は一挙に複雑化する。そのようなポートフォリオで最適な資産構成を研究することが１９５０年代に起こり、ハリー・マーコビッツ（1927 ー）らによって資産選択理論が確立された。マーコビッツは 1990 年、「資産運用の安全性を高めるための一般理論の形成」により、ウィリアム・シャープ (1934 ‐)、マートン・ミラー (1923-2000,MM 理論で受賞) とともにノーベル経済学賞を受賞した。彼は東京大学の客員教授も務めた。

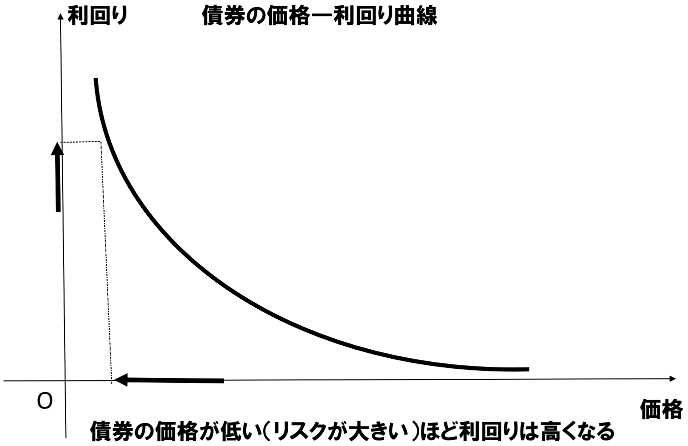
われわれを取り巻く社会は様々なリスクにさらされている。人々はいつ癌など深刻な病や傷害にあうかも知れず命の危険に脅かされており、大地震や土砂災害などの自然災害の頻度は以前よりも増しており、そのリスクは甚大だ。そのほかに経済財・サービスの価値も様々な要因で変動する。金融・資本市場では株式や債券、通貨、商品などは日々、価格変動リスクを負っている。あるいは、債権の保有者は、融資を受けたり債券を発行するなどして債務を負った企業や国家が務める債務履行リスクにおびやかされている。これは信用リスクと呼ばれている。

しかし、リスクと一色淡に言っても病気や地震などのリスクと金融資産のリスクには大きな相違点がある。進行している癌など命の危険があるほどの病におかされている場合や大地震によるリスクはリスクのみでリターンがない一方で、金融資産のリスクには、リスクがある一方でリターン（収益）も期待できることである。虎穴に入らずれば虎児を得ず、との諺もある。ある企業の業績が悪化して株価が大きく下落すればリスクは大きくなるが、逆に株価を暴落した安値で買って、業績が回復して株価が上昇したときには高値で株式を売却すれば大きな収益を得ることが期待できる。債券の価格も低い（リスクが大きい）ほど投資利回り（リターン）は大きくなる（下図）。金融資産市場のリスク分析とは、合理的なリスク・リターン の関係を分析することである。日常言われている病や災害のリスクと金融資産のリスク分析は基本的に異なる点に留意されたい。

債券の価格と利回りの関係（満期 n 年）

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots\cdots + \frac{C_n + 100}{(1+r)^n}$$ (p : 価格、r:利回り、100 は投資元本）

債券の価格は、毎期の利息収入（償還時には利息収入＋元本）を利回りで割り引いた現在価値の和として表されるが、これはリスク・リターンの関係を計量化したものともいえる。



本節では説明を簡単にするために企業の株式からなるポートフォリオの価格変動リスクの評価方法を中心に説明する。まず、企業Ａ社、Ｂ社の株式の収益率を考えよう。好況、通常の景気、不況がそれぞれ１/３の確率で起こり、それぞれの場合の収益率を以下のように仮定する。

景況感	起こる確率	Ａ社の収益率（%）	Ｂ社の収益率（%）
好況	1/3	40	20
通常	1/3	30	0
不況	1/3	—10	10

このとき、

Ａ社の収益率の期待値＝ $40 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} + (-10) \cdot \frac{1}{3}$

=13.33+10-3.33=20

Ｂ社の収益率の期待値＝ $20 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3}$

=6.66+0+3.33=10

となる。次に、収益率の期待値を中心に収益率がどの程度変動（偏り）するかをみるために**分散、標準偏差**を計算してみよう。この 標準偏差（収益率の偏り）が計量化されたリスクと考えられる。

ここで、分散、標準偏差は以下の式で与えられる。

分散＝偏差の２乗の期待値

標準偏差＝分散の平方根

Ａ社の分散と標準偏差

確率	Ａ社の収益率（%）	収益率の偏差	偏差の２乗	偏差の２乗 × 確率
1/3	40	20	400	133.33
1/3	30	10	100	33.33
1/3	− 10	− 30	900	300

収益率の期待値＝２０%　　偏差の２乗の期待値（分散）＝ 466.66

分散の平方根（標準偏差）＝ 21.60 %

Ｂ社の分散と標準偏差

確率	Ａ社の収益率（%）	収益率の偏差	偏差の２乗	偏差の２乗 × 確率
1/3	20	10	100	33.33
1/3	0	− 10	100	33.33
1/3	10	0	0	0

収益率の期待値＝ 10 %　　偏差の２乗の期待値（分散）＝ 66.66

分散の平方根（標準偏差）＝ 8.16 %

以上をまとめると

	Ａ社の収益率	Ｂ社の収益率
確率１/３	40	20
確率１/３	30	0
確率１/３	－10	10
収益期待値	20	10
分散	466.66	66.66
標準偏差	21.60	8.16

つまり、Ａ社はハイリスク・ハイリターン、Ｂ社はローリスク・ローリターンの投資対象といえることがわかった。

２．ポートフォリオのリスク評価

次にポートフォリオのリスクがどのように表されるかを考えてみよう。ここで具体的な数値に代えて数式による分析を導入する。Ａ社の株式の収益率の起こり得る値、確率を

$$\begin{cases} \text{収益率 } r_i(\text{確率 } p_i)(i=1,2,\cdot\cdot\cdot,n) \\ \sum p_i = 1 \end{cases}$$

とする。このとき、

収益率の期待値＝ $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i (= R$ とおく）

収益率の分散＝ $\sum_{i=1}^{n} p_i$・（収益率偏差の２乗）

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(r_i - R)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(r_i^2 - 2r_iR + R^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 - 2R\sum_{i=!}^{n} p_i r_i + R^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 - 2R^2 + R^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 - R^2$$

となる。よって標準偏差 σ は

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} p_i r_i)^2} = \sqrt{E(r_i^2) - (E(r_i))^2}$$

を得る。次に、Ａ社とＢ社の株式の収益率の**共分散、相関係数**と呼ばれる数値を以下のように定義する。

確率	Ａ社の収益率	Ｂ社の収益率
p_1	r_{a1}	r_{b1}
p_2	r_{a2}	r_{b2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_n	r_{an}	r_{bn}

共分散 $cov(r_{ai}, r_{bi}) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i(r_{ai} - \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai})(r_{bi} - \sum_{i=1}^{n} p_i r_{bi})$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(r_{ai}r_{bi} - R_a r_{bi} - R_b r_{ai} + R_a R_b)(R_a = \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai}, R_b = \sum_{i=1}^{n} p_i r_{bi})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai} r_{bi} - R_a R_b - R_b R_a + R_a R_b$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai} r_{bi} - R_a R_b$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai} r_{bi} - (\sum_{i=1}^{n} p_i r_{ai})(\sum_{i=1}^{n} p_i r_{bi})$$
$$= E(r_{ai} r_{bi}) - E(r_{ai})E(r_{bi})$$

相関係数（ρ）

$$\equiv \frac{cov(r_{ai}, r_{bi})}{\sigma_a \sigma_b} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i r_{ai} r_{bi} - (\sum_{i=1}^n p_i r_{ai})(\sum_{i=1}^n p_i r_{bi})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i r_{ai}^2 - (\sum_{i=1}^n p_i r_{ai})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i r_{bi}^2 - (\sum_{i=1}^n p_i r_{bi})^2}}$$

以上の準備を基に ポートフォリオの分散と標準偏差 を求める。

今、A社とB社の株式を $t : (1-t)$ の割合で持つ株式ポートフォリオを考える。

確率	収益率
p_1	$tr_{a1} + (1-t)r_{b1}$
p_2	$tr_{a2} + (1-t)r_{b2}$
$\vdots$	$\vdots$
p_i	$tr_{ai} + (1-t)r_{bi}$
$\vdots$	$\vdots$
p_n	$tr_{an} + (1-t)r_{bn}$

ポートフォリオの収益率の期待値 $= \sum_{i=1}^n p_i \{tr_{ai} + (1-t)r_{bi}\}$

$$= t\sum_{i=1}^n p_i r_{ai} + (1-t)\sum_{i=1}^n p_i r_{bi}$$

$= tR_a + (1-t)R_b = C$ とおく。

ポートフォリオの分散 $= \sum p_i \{tr_{ai} + (1-t)r_{bi} - C\}^2$

$$\begin{aligned}
&= \sum p_i \left\{t^2 r_{ai}^2 + (1-t)^2 r_{bi}^2 + C^2 + 2t(1-t)\right\} r_{ai} r_{bi} - 2C(1-t)r_{bi} - 2Ctr_{ai}\} \\
&= (t^2 E(r_{ai}^2) - t^2 R_a^2) + 2t^2 R_a^2 + \{(1-t)^2 E(r_{bi}^2) - (1-t)^2 R_b^2\} + 2(1-t)^2 R_b^2 \\
&\quad +2t(1-t)E(r_{ai} r_{bi}) - 2C(1-t)R_b - 2CtR_a + 2t(1-t)R_a R_b \\
&= t^2\sigma_a^2 + (1-t)^2\sigma_b^2 + 2t(1-t)\left[E(r_{ai} r_{bi}) - E(r_{ai})E(r_{bi})\right] \\
&= t^2\sigma_a^2 + (1-t)^2\sigma_b^2 + 2t(1-t)cov(r_{ai}, r_{bi})
\end{aligned}$$

$t = \alpha, (1-t) = \beta$ とおけば、

ポートフォリオの分散 $= \alpha^2\sigma_a^2 + \beta^2\sigma_b^2 + 2\alpha\beta cov(r_{ai}, r_{bi}) = \alpha^2\sigma_a^2 + \beta^2\sigma_b^2 + 2\alpha\beta\sigma_a\sigma_b\rho$

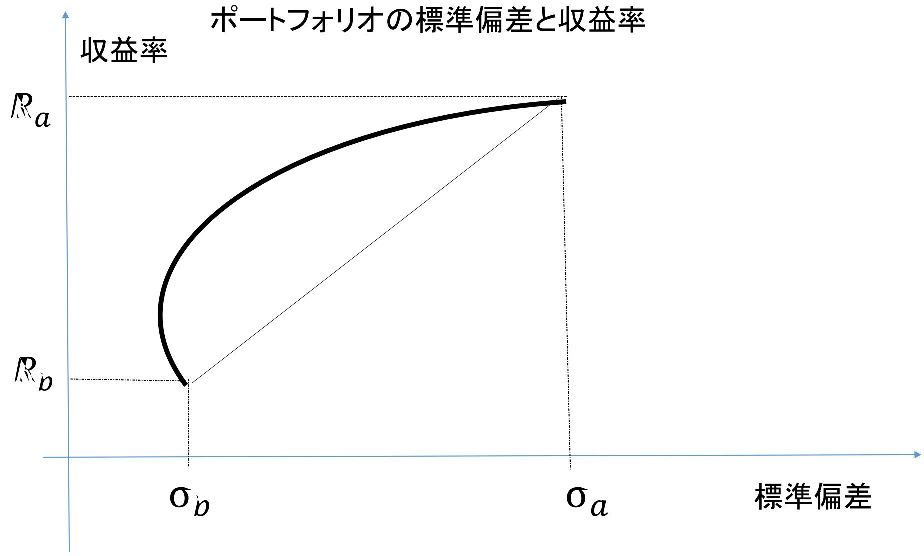
を得る。すなわち、

ポートフォリオの標準偏差は、ポートフォリオに組み込まれた証券の標準偏差だけではなく、証券間の共分散（または相関係数）にも影響されるということがわかった。

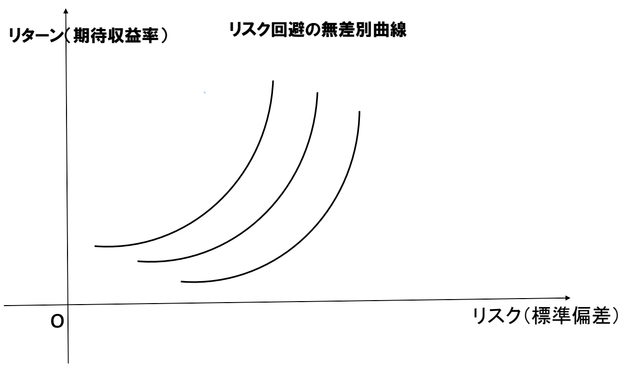
また、**２証券が完全に連動しない限り（すなわち、相関係数が１より小さい限り）、ポートフォリオの標準偏差は、２証券の標準偏差の加重平均よりも小さくなる。これがポートフォリオのリスク分散効果である。**

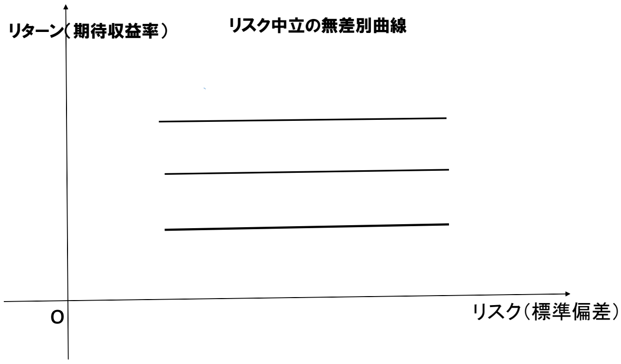
２証券の組み合わせを様々に変えたとき、ポートフォリオの標準偏差と収益率の関係をグラフに表すと以下のようになる。

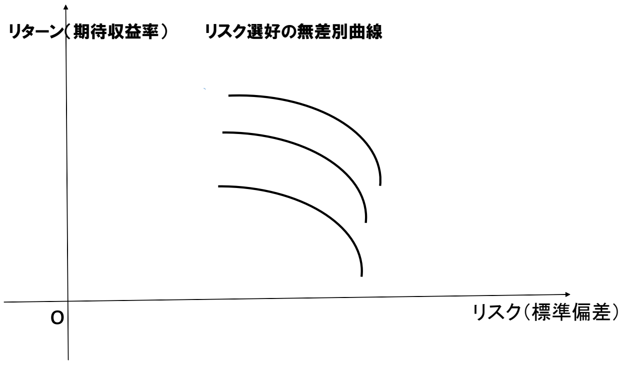
点（$\sqrt{\alpha^2\sigma_a^2 + \beta^2\sigma_b^2 + 2\alpha\beta\sigma_a\sigma_b\rho}, \alpha R_a + \beta R_b)$ が描く曲線



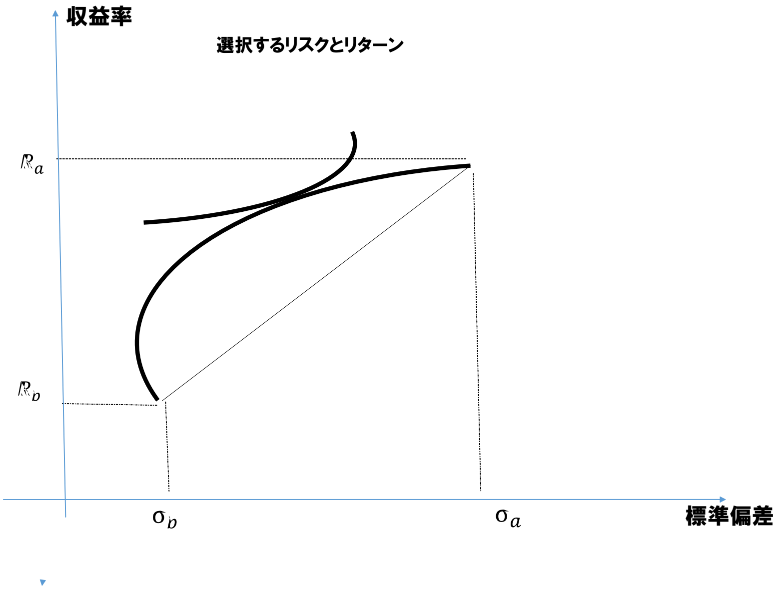
さて、以上のようなリスク・リターンの関係を踏まえて、ポートフォリオの所有者はどのような資産選択の配分を選ぶだろうか。これは、ポートフォリオの所有者のリスクとリターンの選択の**無差別曲線**に関連して決定される。これは、リスク、リターンのどのような組み合わせを選好するかということである。無差別曲線は、リスク回避、リスク中立、リスク選好の３つの場合に対して以下のようになるだろう。

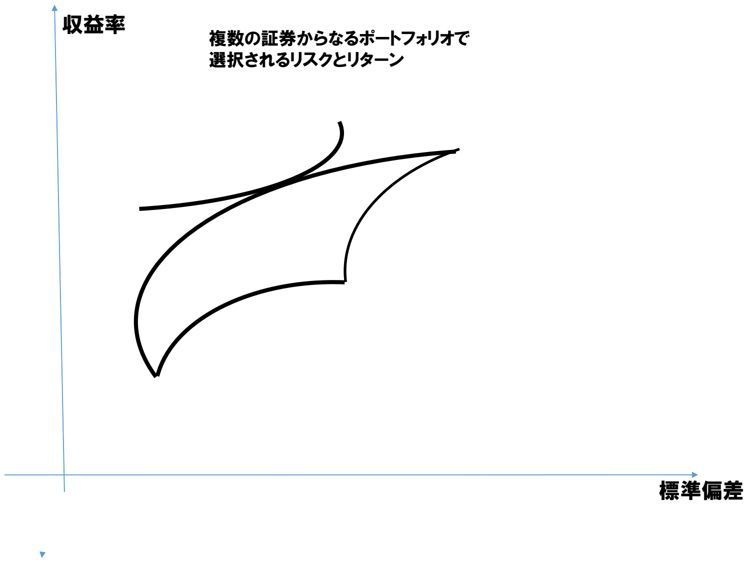






一般に高いリスクに直面した人は同じ経済的な効用を求めるからやはり高いリターンを求めると考えられ、無差別曲線は右上がりの曲線 となるだろう。そして、実際に選択するリスク、リターンは以下のようにポートフォリオの標準偏差と収益率の曲線と無差別曲線が接した点となる。





＊本稿の執筆に際しては、以下を参考とした。

・経営財務入門（井手正介・高橋文郎、日本経済新聞出版社）

＊筆者経歴

東京大学理学部数学科を経て教育学部卒業。証券会社、外資系通信社で金融・資本市場の業務を経験。専門は、債券資本市場。主な著書・論文：『信用リスクを読む』（日本評論社)、『信用リスクとＭ＆Ａ』（同)、『世界金融危機と信用リスク』（同)、『鎮めの文化と資本市場』（ブルームバーグ)、『ユーロ市場における金融革新』、『金融派生商品』

mail: sakurasaku9286@willcom.com