環論と存在性—複素数とはなんだろうか

上野孝司

2017 年 2 月 13 日

環論と存在性−複素数とはなんだろうか

１．環論と複素数

複素数は、虚数 i を

$$i^2 = -1$$

として、$a + bi(a, b$ は実数）と表せる“数”であり、通常、この数の体系を複素数体と呼び、$\mathbb{C}$ で記される。この虚数、複素数は２次以上の方程式を解くことができるための必要性から生まれた。数学史によると２次方程式ではなく、３次方程式の解がカルダノ（$1501 - 1576$）によって与えられることによって初めてその必要性が生じたとの記述があるが、２次方程式もその解が完全に与えられるためには複素数を認めなくてはならない。実際、人類の長い歴史のなかで２次方程式を解くために、i の存在性を考えた、あるいはその存在性と戦ったひとは少なからずいたと言っても大きな誤りではないだろう。この趣旨によって、２次方程式から話しを始めよう。実数係数の２次方程式、例えば、

$$x^2 + x + 1 = 0$$

は、

$$(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

と変形されるから x を実数としては解がないから、$\sqrt{-1} = i$ と記して、

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

として“一応”解けたことにするのである。これが現代の数学教育である。しかし、通常の常識を持った学生ならこのような怪しい数を勝手に天下り的に導入されて不満あるいは反感を持つのが普通である。こんな実在しない数 i を勝手に作って実数と組み合わせて、加減乗除といった数の体系を構築してもよいのだろうか。しかし、現代の数学教育ではこういった謎めいた議論を素通りして、論理を勝手に展開してさらに進んでしまい、“まじめな”学生も（いや、まじめだからこそ）教育にそれほど不満をもらさず沈黙してしまい、数学の学習を続けてこれといった支障はきたさない。

実は筆者が数学の世界にのめり込むきっかけとなったのは、複素数の存在とガロアの理論というものがあることを中高生のときに知ったことであった。とくに負の数の平方根を i を用いて表現して２次方程式の解を表現できたことは奇妙でありながらも、その新鮮さに一人悦にいっていたのであった。

ところがすぐに別の問題に突き当たる。虚数 i の導入で 2 次方程式を解くことができたのであるが、3 次方程式、4 次方程式・・・そして一般の n 次代数方程式に解はあるのだろうか。そしてその解はどのように表現されるのであろうか。3 次方程式、4 次方程式には 2 次方程式の虚数に相当するもの、“j”や“k”なる数の導入が必要となるのではないか？といった素朴な疑問がわきあがってくるのはむしろ当然といえよう。しかし、結論は複素数の導入だけで解の存在は肯定的に解決されるのである。ガウスが解決したいわゆる「代数学の基本定理」である。

代数学の基本定理：複素数を係数とする n 次の代数方程式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

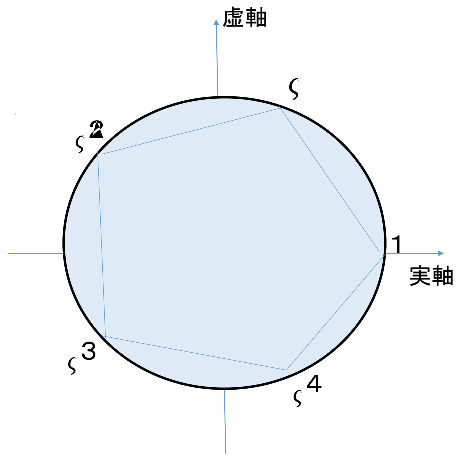
は必ず少なくともひとつの複素数の解を持つ。

これによって一般の n 次代数方程式は、複素数の範囲にすべての解を持つことが示されるのである。これは数学を学ぶ者や数学者にとっては実に幸運な事実であった。虚数という複素数の導入だけで、j や k を導入することなく数学を展開することができるのであるから。複素数関数の解析が対象となる（多変数）関数論という分野もある。ただし、一般代数方程式の解の表現方法は解析学ではなく代数的問題であり、ガロアやアーベルが示したように、5 次以上の一般代数方程式には解の公式がない。読者はここで、“解の存在”と“解の公式の存在（解の表現方法の存在）”とを混同してはならない。n 次の一般代数方程式は複素数の範囲で解を持つのであるが、$n \geqq 5$ のときには一般代数方程式の解を表現する公式がないのである。ただ、もちろん $n \geqq 5$ であっても解を示すことができる個別の方程式は存在する。極論すれば、$(x-1)^n = 0$ という n 次方程式は $x = 1$ を n 重根として持つ。$x^5 = 1$ や $x^7 = 1$ も解を表現する方法がある。

実際、複素数の威力はすさまじいものがある。代表的な例が正多角形の作図問題だ。方程式 $x^n = 1$ の解が複素平面（ガウス平面）上で単位円の円周を n 等分する正多角形を構成し、正多角形の作図問題という極めて現実的な問題が $x^n = 1$ の方程式を代数的に解くという複素数の世界の問題に置き換わる。いわば“虚”が“現実”の問題を解決してしまうのだ。具体的には、$x^n = 1$ の解は、

$$\zeta = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

として、1、$\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}$ で表現される。威力あるもう一つの事例が、複素関数論の「留数解析」という手法を用いれば実数の解析では求めることが困難な定積分の値を容易に導くことができる場合があることで複素数はここでも有益だ。



さて、話を元に戻そう。複素数の有効性は、ガウスやコーシーらの数多くの数学者によって明示的に示されたのであるが、それでも i という数の根拠はなにか？と突きつめて問うと答えに窮してしまうのである。

ここで議論の方向性を変えて別の観点から考えてみる。今、実数を係数とする多項式の集合を $\mathbb{R}[X]$ で表すことにして、$\mathbb{R}[X]$ の元を x^2+1 という 2 次式の多項式で除した商と余りに分解して考えてみる。つまり、任意の n 次の多項式 f は、

$$f = P(x)(x^2+1) + (ax+b)$$

と一意的に表せる。P が商、$ax+b$ が余りである。もちろん、$a=0$ や $a=b=0$ のときもある。ここで別の多項式 g を任意にとるとこれも、

$$g = Q(x)(x^2+1) + (cx+d)$$

と一意的に表現される。このとき、$\mathbb{R}[X]$ を $\underline{(x^2+1)\text{ を法}}$ として考えてみる。つまり、$\underline{x^2+1\text{ で除した余りが同じとなる多項式}}$
のである。

$$f <-----> ax+b$$

という対応を考える。すると f と g の和には、

$$f+g <-----> (a+c)x+(b+d)$$

が対応する。それでは、f と g の積にはどのような一次式が対応するのであろうか？具体的に計算してみると、

$fg = \left\{P(x)(x^2+1)+(ax+b)\right\}\left\{Q(x)(x^2+1)+(cx+d)\right\}$
$\quad = PQ(x^2+1)^2 + Q(ax+b)(x^2+1) + P(cx+d)(x^2+1) + (ax+b)(cx+d)$
$\quad = R(x)(x^2+1) + (ax+b)(cx+d)$

ここで、

$R = PQ(x^2+1) + Q(ax+b) + P(cx+d)$

である。ここで、

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$$
$$= ac(x^2+1) + (bc+ad)x + bd - ac$$

と変形できるから、結局、

$$fg = S(x)(x^2+1) + (ad+bc)x + (bd-ac)$$

$$(S = R + ac)$$

と表すことができ結局、fg には

$$fg < ----- > (ad+bc)x + (bd-ac)$$

と対応することがわかる。以上をまとめると

$$\begin{cases} f+g < ----- > (a+c)x + (b+d) \\ fg < ----- > (ad+bc)x + (bd-ac) \end{cases} \quad \cdots (1)$$

と対応することがわかる。ところで、２つの複素数α $= ai+b, \beta = ci+d$ に対して $\alpha+\beta, \alpha\beta$ を計算してみると

$$\begin{cases} \alpha+\beta = (a+c)i + (b+d) \\ \alpha\beta = (ai+b)(ci+d) = -ac + (bc+ad)i + bd \\ \qquad = (ad+bc)i + (bd-ac) \end{cases} \quad \cdots (2)$$

（１)、（２）をよくみると、（１）で $ax+b, cx+d$ の x を i で置きかえたものがまさに（２）になっている！つまり、実数係数の多項式 $\mathbb{R}[X]$ を (x^2+1) を法 (mod) として考えてみると、その和と積は複素数体 $\mathbb{C}$ と同じ構造を持つことがわかる。よって、複素数体 $\mathbb{C}$ と同じ構造を持つ代数的構造体を構成する ことができたことがわかる。これを現代数学の専門用語を用いると、

$$\mathbb{R}[X]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$$

と表し、「**実数係数の多項式からなる多項式環$\mathbb{R}[X]$をx^2+1 からなるイデアルで除した商環は複素数体$\mathbb{C}$に同型である**」と表現する。やや難しい表現となったが言葉はどうでもよい。本質は（1）と（2）が同じ数構造を持つことが理解できればよく、それを専門用語で表しただけのことであり、本質は決して難しい話ではない。

これで複素数を 環論 を用いることによって“実在”するものとして代数的に示すことができたことになる。ここで環論に深入りする必要はない。x^2+1 を法として考えるということと、（１)、（２）が同じことを示していることが理解できればよくかつそれで十分である。x^2+1 を法として考えるということは、複数の多項式が (x^2+1) で除した余りが同じであるならば、同じ仲間（類）とみるということである。ただ、それでも、“それでは x はなにか”という疑問が残るかもしれないが、それには触れない（触れる必要もない)。

２. 他の構成方法

（1）実数の組として定義する方法

今まで環論を使って複素数を構成したが、他の構成方法を示そう。

いま、実数 a, b の対を一つの構成要素として、(a, b) で示す。そしてこの実数の組の集合を考えて、その元の和と積を次のように定義する。

加法：$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

乗法：$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

このように演算規則を持つ実数の対（$a, b)$ からなる集合は複素数体 $\mathbb{C}$ と同じ構造を持つことがわかる。

ここで、

$$(1, 0) < ---- > 1, \quad (0, 1) < ---- > i$$

と対応させればよいのであり、

$$(a, 0) < ---- > a, \quad (0, b) < ---- > bi$$

とすれば、

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b) < ---- > a + bi$$

が対応することになる。よって、

$$\begin{aligned} i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) &= (0 - 1, 0 + 0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となることがわかる。また、(a, b) の逆元 $(a, b)^{-1}$ としては、

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

より、

$$(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$

と考えればよい。実際、

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a, b)^{-1} &= (a, b) \cdot (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) \\ &= (a \times \frac{a}{a^2 + b^2} - b \times \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \times \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \times \frac{a}{a^2 + b^2}) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

であることが示される。

（２）行列による表現

複素数 $a + bi$ に行列

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

を対応させることによって、この行列の集合は複素数と同じ構造を持つ。つまり、

$$1 < -- > \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \quad i < -- > \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

と対応する。

$$aE + bI = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$I^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$(aE + bI)(cE + dI) = (ac - bd)E + (ad + bc)I < -- > (a + bi)(c + di)$$

などが導かれ、$aE + bI$ が 1 つの複素数に対応していることがわかる。詳しい検証は読者自ら検証されたい。

以上から、複素数体 $\mathbb{C}$ を実際に構築することができたのである。数を実数から複素数に広げることによって、それは代数的にも解析的にもより奥深く、また幾何学的にも美しい内容を伴う事象となるのである。それは、未熟な人間の複雑な計算や論理展開を一挙に飛び越えて芸術的ともいえる事象となって我々を多様な世界に誘うのである。別稿で複素数を対象とした関数の微分可能性や積分といった複素解析の一端を示す。

＊本稿の執筆に際しては、以下を参考とした。

・複素数 30 講（志賀浩二、朝倉書店）