

金融工学 オプション価格は熱方程式、ブラック・ショールズモデル

上野孝司

2016年9月5日

概要

ファイナンス数学 オプション価格は熱伝導方程式、ブラック・ショールズモデル

1. オプション取引

本稿では、前稿までとは趣を一変し、金融、ファイナンスについての数学、金融工学を述べる。その第一弾として、ある経済財・サービスを購入または売却する権利の価値（価格）について述べる。この権利の価値を以下計量的に分析するのだが、それに物理学の熱力学に現れる偏微分方程式が確率微分方程式として顔を現すところが本稿の核心となり、最終的にブラック・ショールズモデル（ $B-S$ 式）と呼ばれる有名なオプション評価式を導出する。金融工学でも重要な位置を占めるモデルである。

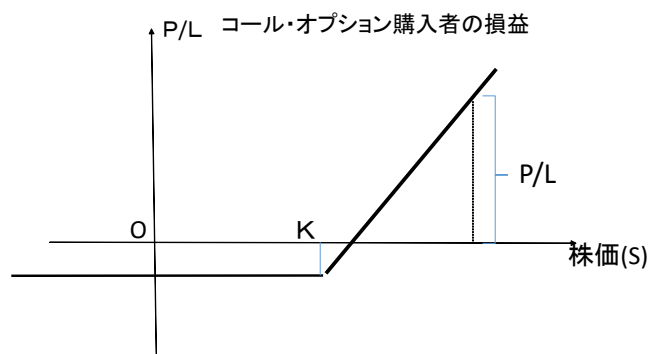
分析対象が財・サービスの購入または売却の価値そのものではなく、購入または売却する権利の価値を論じることに注意されたい。この購入または売却する権利をオプション（option）という。特に買う権利をコール・オプション（call option）、売る権利をプット・オプション（put option）という。このオプションにかかわる財・サービスと金銭の売買をオプション取引といい、先物、スワップ取引とならぶデリバティブ（金融派生商品）の一種である。オプション取引には、オプションを購入してから権利を行使して対象となる財・サービスを購入または売却したりするほか、オプション（権利）そのものを売買する2通りが考えられる。もちろん利益が出ない状況では、オプションの権利を放棄してなにも行為をおこななくてもよい。オプションは権利であって義務ではないことから、オプションの買い手の損失は支払ったオプション料に限定される。

オプション取引の起源は古く、古代ギリシャまで遡る。哲学者ターレスは天文学の知識を用いて、翌年のオリーブが豊作となることを予想して、オリーブの搾り機を安い価格で購入する権利を購入した。翌年予想通り、オリーブが豊作となり、ターレスは権利を行使して安い価格で搾り機を購入して需要の高まりを反映して搾り機を高値で売って莫大な利益を得たとされる。このオプション取引の対象となった経済財はオリーブの搾り機であり、行使した権利はコール・オプションである。17世紀に起きたチューリップの球根の投機もオプション取引であったとされている。

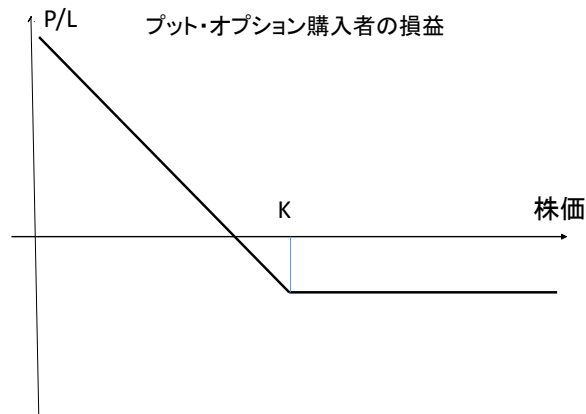
現代では、株式が中心的な原資産としてオプション取引は原始的に発生し、一時はオプションそのものを売買する投機的な市場となって賭博化していたが、1973年4月にシカゴ・オプション取引所（Chicago Board Option Exchange; CBOE）の創設に呼応して、F.BlackとM.Scholesの二人の研究者によって、いわゆるオプション評価モデル（Option Pricing Model; OPM）、ブラック・ショールズモデル（ $B-S$ 式）が提示され

たことで、次第に理論的な裏付けを伴った近代的な市場へと発展する契機となった。現在では、オプション評価理論は株式市場だけにとどまらず、通貨や金利・債券先物、商品市場、株価指数などの各種取引のほか企業の負債評価といった財務理論や保険などの領域にまで広がって発展している。1997年、ショールズ（ブラックは既に故人となっていた）およびこの理論に寄与したロバート・マートン（Robert Merton）にノーベル経済学賞が授与された。

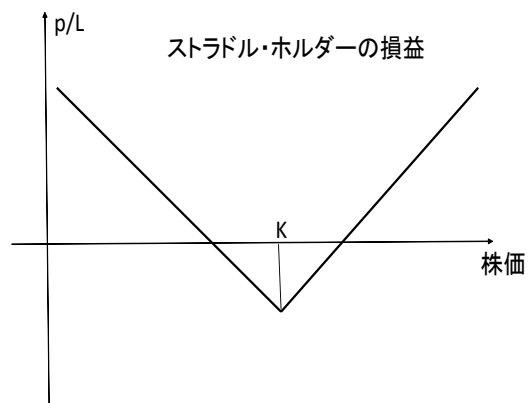
ここで、株式オプションを例にとり、オプション取引の仕組みを簡単に説明しよう。今、A社の株価を対象とするコール・オプションを考える。現在の株価を120円とし、権利の行使価格を100円としよう。オプションは3か月後の1日に1回のみ行使できるとする。オプション料（オプションの価格）を30円とする。3か月後に株価が150円に上昇したとすると、オプションの購入者は権利を行使して株式を100円で購入し、市場で150円で売却すれば、 $150円 - 100円 = 50円$ の利益を得る。支払ったオプション料を差し引けば、 $50円 - 30円 = 20円$ の純利益を得ることができる。満期の3か月後の株価を S 、行使価格を K とすると、オプション購入者の満期の損益は、オプション料を考慮しない場合、 $\max(0, S - K)$ となる。オプション料 C を考慮した場合の損益は、 $\max(0, S - K) - C$ となる。これを図示すると、

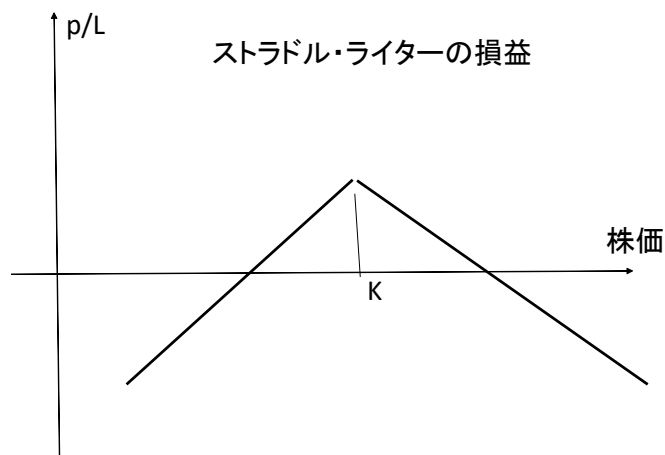


プット・オプションの場合も同様に考えることができる。この場合は、プット・オプションの購入者は株価が下落した場合、市場で安い価格で株を購入してそれを権利行使価格の高値で売却することで利益を得ることができる。重要なことは、オプションは 権利であって義務ではない ということである。コール・オプションの場合には、株価が上昇した場合に権利を購入して利益を得ることができる一方で、株価が下落した場合には権利を行使せず放棄すればよいのである。つまり、オプションの購入者の最大の損失は支払ったオプション料に限定されるということである。一方、オプションを売った側（オプション・ライターという）は無限の損失を被る可能性がある。オプションの購入者とライターの損益は相殺しあってゼロとなる。

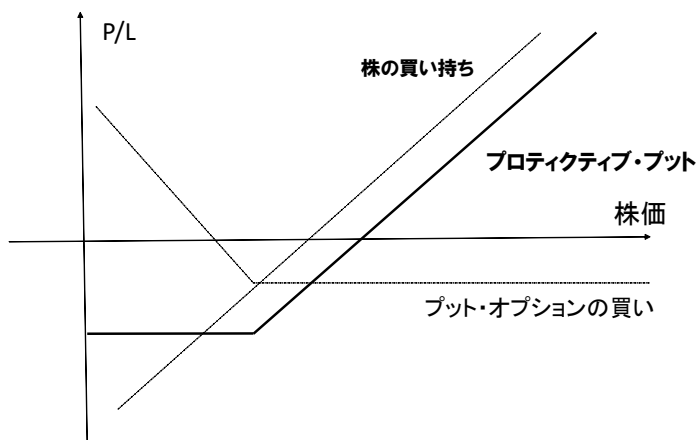


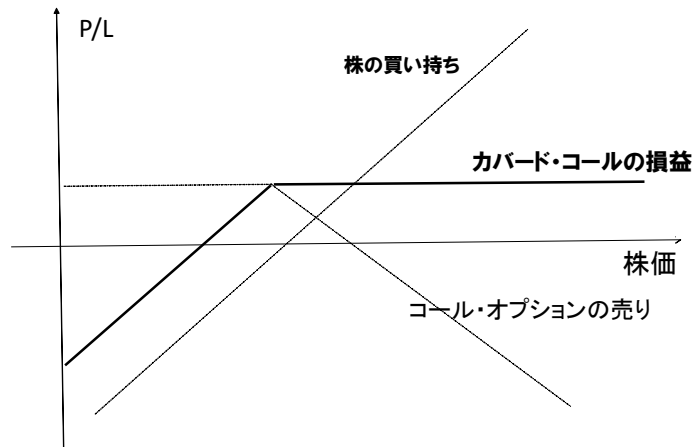
以上、コール・オプション、プット・オプションの取引の仕組みを述べたが、コール、プットの双方を利用する戦略も存在する。たとえば、同じ行使価格のコール・オプションとプット・オプションを購入（あるいは売却）した場合の戦略（ストラドル）の場合の損益は下図のようになる。図からわかるように、ストラドル・ホルダーは、相場の上昇・下落の変動幅が大きいと見た場合にとる戦略、ストラドル・ライター（売り手）は、相場が行使価格を中心に小幅な値動きをするとみた場合にとる戦略である。





さらに、原資産とコール、プットオプションを組み合わせた戦略も考えられる。代表的な例が、原資産の買い持ちとプットの買いの組み合わせであり、その損益はコール・オプションの買いとなる。これをプロテクトティブ・プットと呼ぶ。これは損失を一定以下に抑える保険の効果をもつ。これに対して、原資産の買い持ちとコール・オプションの売りを組み合わせた戦略をカバード・コールという。この損益は、プット・オプションの売りの場合と同様な効果を持ち、利益の上積みを狙った戦略である。





本稿では、対象となる経済財となる原資産として株式をとりあげ、株式オプションを中心に解説する。議論の中心は、オプションの価値（価格）はどのようにして決まるかというオプション評価理論である。結論から先に言えば、オプションの価格は、一定の仮定のもとに熱力学の熱伝導方程式という2階の偏微分方程式を解くことによって求まり、議論の舞台はファイナンスから物理数学に移る。本稿の意図は、オプション取引という金融・経済事象に物理数学がいかにして表れ、解かれるかを紹介することにある。

以下、本稿の理論展開のあらすじをあげておく。

1. 1期間モデルによるオプションの価格
2. 連続過程におけるオプションの価格・・・ブラック・ショールズモデル
3. 多期間モデルによるオプションの価格・・・2項分布モデル
4. ブラック・ショールズモデル再論

1. 1期間モデルによるオプションの価格

今、A社の株価が80円として、1年後に80円でA社の株式を購入できるコール・オプションを考える。この権利を行使できるあらかじめ決められた価格を行使価格（Strike Price）という。今の例では、行使価格は80円である。オプションの価格をCとする。今、私がこのコール・オプションをある特定の人にC円で発行すると同時に借入を行い、A社の株式を購入することでキャッシュ・ポジションをリスク中立的な状態、つまり、0にするものとしよう。借入額をB（金利10%）、購入する株式数を とすると、

$$-80 + B + C = 0 \dots (1)$$

(1) 1年後に株価が1.5倍（120円）に上昇した場合

当然、コールオプションの購入者は権利を行使して $120 - 80 = 40$ 円の利益を得る。私のポジションは、上昇した株式 $(1.5) 80$ とオプションの損失料—40円と借り入れた金額の返済— $1.1 B$ であるから、

$$(1.5) 80 - 1.1 B - 40 = 0 \dots (2)$$

(2) 1年後に株価が50%下落して40円になった場合

オプションの行使はないから、私にオプションによる損失はない。よって、私のポジションは、

$$(0.5)80 - 1.1B = 0 \cdots (3)$$

以上の連立方程式を解いて、

$$= \frac{1}{2}, \quad B = 18.18, \quad C = 21.82$$

を得る。私が現在得るオプション料は 21.82 円となる。ところで、今まで経た行為を振り返ってみよう。まず、オプション料が決まるまで関わる変数はなにか、ということである。現在の株価 (S)、行使価格 (K)、満期までの期間 (T)、金利 (r)、および株価の上昇・下落率 (= 株価の変動性) の 5 つの変数が関与していることがわかるであろう。つまり、 S, K, T, r の 5 つである。

次に、(1)、(2)、(3) ではなにをやったのか、ということである。いずれもキャッシュ・ポジションを 0 とした、つまりヘッジ・ポートフォリオを作成したのである。見方を変えれば、コール・オプションを借入れと株価の購入によって作り出していることに他ならない。オプションというポジションを借入れと株の購入によって複製しているのである。これこそ、オプション評価理論の原点でもあり、また本質ともいえるのである。オプション理論が option replicating theory といわれる所以である。replicate は複製を意味する。

今までの議論を数式を用いて一般化しておこう。コール・オプションを売り、1 単位の株を買うと同時に借入れを起こすというヘッジ戦略をとるものとする。株価の上昇率を u (例: 1.5)、下落率を d (例: 1 - 0.5)、金利を r (例: 1.1)、 C_u は株価が上昇した場合のコール・オプションの価値、 C_d は株価が下落した場合のコール・オプションの価値とする。 t 期と $t+1$ 期後のポジションを等しくすると、

$$t \text{ 期: } C - S + B = 0$$

$$t+1 \text{ 期 } \begin{cases} -C_u + uS - rB = 0 \\ -C_d + dS - rB = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}$$

$$B = \frac{dC_u - uC_d}{r(u - d)}$$

$$C = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r - d}{u - d} \right) C_u + \left(\frac{u - r}{u - d} \right) C_d \right]$$

ここで、

$$p = \frac{r - d}{u - d} \quad \text{とおくと、} \quad 1 - p = \frac{u - r}{u - d}$$

となり、

$$C = \frac{1}{r} [pC_u + (1 - p)C_d]$$

p は確率的要素を含み、オプション価格は、 C_u と C_d の期待値の現在価値とみられる。

2. ブラック・ショールズモデル

本節では、1 節の離散型の不連続モデルとは異なり、株価が連続的な確率過程に従う場合のオプション評価モデルとして知られるブラック・ショールズモデルの導出について述べる。現実に入手可能なデータを用いて導出できるモデルであり、実務で応用範囲が広い。第 1 節でも触れたが、使用する記号を掲げておく。

C : 現時点におけるコール・オプションの価格

S : 現時点における原資産 (株価など) の価格

K : 行使価格

T : 満期までの期間

r : 非危険利子率

σ : 原資産の価格変動性。原資産の瞬間的な収益率分布の標準偏差。

$N(d)$: 値が d のときの正規分布の累積密度。

また、モデルの導出にあたって以下を仮定する。

1. 投資家はプライス・テイカー (price taker) である。
2. 取引コストや税金はかからない。
3. 非危険資産が存在し、投資家は非危険資産を利子率 r で無制限に借入れ、貸し出しを行うことができる。
4. 利子率は時間に関して不変である。
5. 原資産収益率の標準偏差 σ は期間中不変である。
6. 原資産に配当はない。
7. オプションはヨーロピアン・オプションとする (権利は満期日においてしか行使できない)
8. 原資産の価格は 伊藤プロセス と呼ばれる確率過程に従う (伊藤プロセスについては後述) 。

$$dS = (\alpha S)dt + (\sigma S)dz \quad \dots (2 - 1)$$

ここで α は原資産の瞬間的な 正規確率分布の期待収益率、 σ はその標準偏差、 z は標準正規確率変数を意味し、

$$\left. \begin{aligned} E(z) = 0, \quad Var(z) = E(z^2) = t \\ dz = \sqrt{dt} \end{aligned} \right\} \dots (2 - 2)$$

という特性を持っている。

9. オプション価格は 伊藤プロセス に従う。

さて、オプション価格が従う支配方程式 (偏微分方程式となる) を裁定ポートフォリオという経済行為によって導こう。オプション価格 f が原資産の価格 S と時間 t の関数とする。

$$f = f(S, t)$$

原資産価格と時間が微小変化した場合のオプション価格の変化量は、テイラー展開により、

$$df = f_s dS + f_t dt + \frac{1}{2} f_{ss} dS^2 + f_{st} dS dt + \frac{1}{2} f_{tt} dt^2 + \dots \dots (2-3)$$

と表される。ただし、 $f_s = \frac{\partial f}{\partial S}$, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$, etc.

(2-3) 式に (2-1) 式を代入して整理すると、

$$df = \sigma S f_s dz + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f_{ss} + \alpha S f_s + f_t \right) dt + O(dt^{\frac{3}{2}}) \dots (2-4)$$

となる。上式で $O(dt)$ までの項をとることにする。

$$df = \sigma S f_s dz + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f_{ss} + \alpha S f_s + f_t \right) dt \dots (2-5)$$

一方、オプション価格は原資産の価格の関数であり、 f も正規確率過程に従うとする。

$$df = (\alpha_0 f) dt + (\sigma_0 f) dz_0 \dots (2-6)$$

ここで、 α_0, σ_0 はオプションの期待収益率とその標準偏差を表す。

$dz = dz_0$ として、(2-5) 式と (2-6) 式を比較し、オーダー毎に等値すると、

$$\alpha_0 f = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f_{ss} + \alpha S f_s + f_t \dots (2-7)$$

$$\sigma_0 f = \sigma S f_s \dots (2-8)$$

が得られる。

今、投資家が非危険資産、原資産、オプションの3資産に各々 W_0, W_1, W_2 の金額を投資して、

$W_0 + W_1 + W_2 = 0$ となるようにポートフォリオを組むとする（純投資額はゼロ）。このような裁定ポートフォリオ (arbitrage portfolio) の価値を V とすると、

$$\begin{aligned} dV &= W_0 r dt + W_1 (dS/S) + W_2 (df/f) \\ &= (-W_1 - W_2) r dt + W_1 (dS/S) + W_2 (df/f) \\ &= W_1 (dS/S - r dt) + W_2 (df/f - r dt) \end{aligned}$$

上式に (2-1) 式および (2-6) 式を代入すると次式を得る。

$$dV = \{W_1(\alpha - r) + W_2(\alpha_0 - r)\} dt + (W_1\sigma + W_2\sigma_0) dz \dots (2-9)$$

(2-9) 式の第1項は、裁定ポートフォリオの期待利益、第2項は、裁定ポートフォリオのリスクを表す。純投資額がゼロで正の利益が得られるとしたならば、裁定行為が働き、このような利得機会がなくなるように市場は反応する。

$$\therefore W_1(\alpha - r) + W_2(\alpha_0 - r) = 0 \dots (2-10)$$

また、ポートフォリオのリスクを完全にヘッジするためには、

$$W_1\sigma + W_2\sigma_0 = 0 \dots (2-11)$$

となるように W_1 と W_2 のポジションを調整すればよい。

(2-10) 式と (2-11) 式より

$$\sigma_0(\alpha - r) = \sigma(\alpha_0 - r) \dots (2-12)$$

が得られ、(2 - 7)式と(2 - 8)式を代入すると、次式のようなオプション価格を決定する支配方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{ss} + r_s f_s + f_t - r f = 0 \cdots (2 - 13)$$

オプション価格 $f(S, t)$ は、(2 - 13) 式をオプション失効日における条件

$$f(S, T) = \phi(S)$$

のもとで解くことによって得られる。

オプション価格決定方程式 ((2 - 13) 式) は 放物型の2階の偏微分方程式 で、その標準形は 1次元の熱伝導方程式

$$u_t = a^2 u_{xx} (a: \text{温度伝導率})$$

などでよく見受けられる。

t の代わりに失効日までの期間 $\tau = T - t (> 0)$ をとり

$$f(S, \tau) = e^{-r\tau} Y(S, \tau) \cdots (2 - 15)$$

とにおいて (2 - 13) 式に代入すると

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Y_{ss} + r S Y_s - Y_\tau = 0 \cdots (2 - 16)$$

独立変数 S, τ の代わりに $\xi(S, \tau), \eta(S, \tau)$ を導入する。

$$Y = Y(S, \tau) = Y(\xi(S, \tau), \eta(S, \tau))$$

そこで、chain rule を利用する。

$$\begin{cases} Y_s = \xi_s Y_\xi + \eta_s Y_\eta \\ Y_\tau = \xi_\tau Y_\xi + \eta_\tau Y_\eta \\ Y_{ss} = \xi_{ss} Y_\xi + \xi_s \xi_s Y_{\xi\xi} + \eta_{ss} Y_\eta + \eta_s \eta_s Y_{\eta\eta} \\ \quad = \xi_{ss} Y_\xi + \xi_s^2 Y_{\xi\xi} + \eta_{ss} Y_\eta + \eta_s^2 Y_{\eta\eta} \end{cases}$$

これを (2 - 16) 式に代入すると

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (\xi_{ss} Y_\xi + \xi_s^2 Y_{\xi\xi} + \eta_{ss} Y_\eta + \eta_s^2 Y_{\eta\eta}) + r S (\xi_s Y_\xi + \eta_s Y_\eta) - (\xi_\tau Y_\xi + \eta_\tau Y_\eta) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \xi_s^2 Y_{\xi\xi} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \xi_{ss} + r S \xi_s - \xi_\tau\right) Y_\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \eta_s^2 Y_{\eta\eta} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \eta_{ss} + r S \eta_s - \eta_\tau\right) Y_\eta = 0 \cdots (2 - 17)$$

となるので、上式の第2項、3項をゼロにすれば標準形が得られる。

第2項 = 0 より、

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \xi_{SS} + rS\xi_S - \xi_\tau = 0 \cdots (2-18)$$

(2-18) 式を満足するために

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \xi_{SS} + rS\xi_S = C(\text{constant}) \cdots (2-19)$$

$$\xi_\tau = C \cdots (2-20)$$

を仮定する。(2-19) 式の解として

$$\xi = C_1 \ln S + g(\tau) \quad (C = C_1(r - 1/2\sigma^2))$$

と選び、(2-20) 式に代入すると、 $g(\tau) = C$ が得られる。

したがって、 $C_1 = 1$ とおけば、 ξ として次の形をとればよい。

$$\xi = \ln S + (r - 1/2\sigma^2)\tau \cdots (2-22)$$

第3項 = 0 より、 $\eta_s = 0$ 、つまり、 $\eta \equiv \eta(\tau)$ とすればよい。

(2-22) 式を (2-17) 式に代入すると、

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y_{\xi\xi} - \eta_\tau Y_\eta = 0 \cdots (2-23)$$

ここで、 $\eta_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2$ 、つまり

$$\eta = \frac{1}{2}\sigma^2 \tau \cdots (2-24)$$

と選べば標準形

$$Y_{\xi\xi} = Y_\eta \cdots (2-25)$$

が得られる。

ここで、(2-25) 式の熱伝導型の2階の偏微分方程式を解くことが求められるが、この解法には直接触れずに、結論のみを述べるにとどめる。具体的な解法は、数理物理学の専門書を参照されたい。

結論を述べれば、オプションの失効日 $\tau = 0$ に

$$f(S, 0) = \phi(S)$$

となるようなオプション価格 $f(S, \tau)$ は、

$$f(S, \tau) = \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp\left\{-\frac{(x - \xi)^2}{4\eta}\right\} dx \cdots (2-26)$$

ただし、

$$\xi = \ln S + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$$

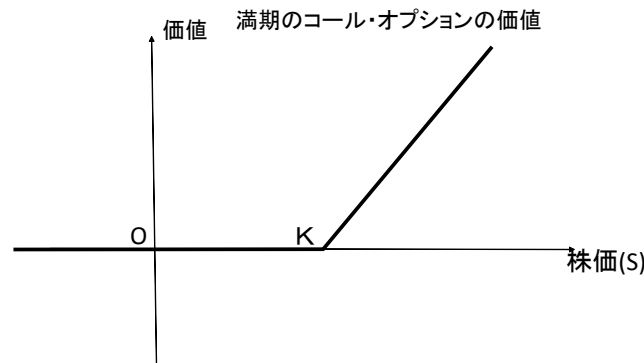
$$\eta = \frac{1}{2}\sigma^2 \tau$$

オプションがコール・オプションの場合には、初期条件は K を権利行使価格として

$$\phi(S) = \begin{cases} S - K & (S > K) \\ 0 & (S \leq K) \end{cases} \dots (2-27)$$

であるので書き改めると

$$\phi(\xi) = \begin{cases} e^\xi - K & (\xi > \ln K) \\ 0 & (\xi \leq \ln K) \end{cases} \dots (2-28)$$



(2-28) 式を (2-26) 式に代入すると

$$f(S, \tau) = \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi\eta}} \int_{\ln K}^{\infty} (e^x - K) \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4\eta}\right\} dx \dots (2-26)$$

$$q = \frac{x-\xi}{\sqrt{2\eta}} \text{ とおくと、 } dq = \frac{dx}{\sqrt{2\eta}}$$

$$q^* = \frac{\ln K - \xi}{\sqrt{2\eta}} \text{ とおくと}$$

(2-26) 式は、

$$\begin{aligned} f(S, \tau) &= \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi\eta}} \sqrt{2\eta} \int_{q^*}^{\infty} (e^{\sqrt{2\eta} \cdot q + \xi} - K) e^{-\frac{q^2}{2}} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} \int_{q^*}^{\infty} (e^{\sqrt{2\eta} \cdot q + \xi} - K) e^{-\frac{q^2}{2}} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} \int_{q^*}^{\infty} (e^\xi \cdot e^{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2\eta}q} - K e^{-\frac{q^2}{2}}) dq \\ &= \frac{e^{-r\tau + \xi + \eta}}{\sqrt{2\pi}} \int_{q^* - \sqrt{2\eta}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{K e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{q^*}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq \\ &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q^* + \sqrt{2\eta}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{K e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{q^*}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq \quad (e^{-r\tau + \xi + \eta} = S) \end{aligned}$$

$$\therefore f(S, \tau) = SN(-q^* + \sqrt{2\eta}) - K e^{-r\tau} N(-q^*)$$

$$\text{ここで、 } -q^* + \sqrt{2\eta} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \equiv d$$

$$-q^* = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\therefore f(S, t) = SN(d) - K e^{-r\tau} N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \dots (2-27)$$

これで、コールのオプション価格を表すブラック・ショールズモデルが導かれた。■

伊藤プロセスとはなにか

ブラック・ショールズモデルの導出にあたって、伊藤プロセスという確率過程を仮定したが、これについて説明しておこう。伊藤プロセスは、解析に確率論を導入した確率微分方程式の分野を開拓した伊藤清京都大学名誉教授(1915-2008)が考案したもので、後に金融工学の分野で応用され、伊藤氏はウォール街で最も有名な日本人ともいわれた。ただ伊藤氏自身は金融投資の分野にはそれほど興味があったわけではないとされている。

伊藤プロセスは非連続型では

$$dS = S \left(\mu dt + \sigma dz \right) \quad (2-28)$$

という形になる。上式は、ある一定期間 t における原資産の価格上昇、収益が $S \cdot \mu dt$ と $\sigma S \cdot dz$ の2成分からなることを示す。 $S \cdot \mu dt$ は、収益が一定率 μ で毎期間増加するトレンドをもつことを示す。次に、 $\sigma S \cdot dz$ は、期間ごとにおける収益が上述のトレンド線の回りで標準偏差が σ の分布をすることを示す。 dz は確率過程を示すものであり、時間成分を含んでおり、実は、

$$dz = \sqrt{dt} \cdot Z \quad (2-29)$$

と表される。 Z は平均が0で標準偏差 σ が標準正規分布に従う確率変数である。

原資産はランダム・ウォークし、時間とともにダイナミックに変動していく。原資産はランダム過程という確率過程に従うものとする。1828年、植物学者ロバート・ブラウンは植物の花粉粒を観察したところ、花粉が不規則な動きをすることを発見した。1905年、アルバート・アインシュタインはこのブラウン運動に関する研究発表を行った。ランダム・ウォークというのは、酔っ払いがあらゆる方向にふらつきながら歩くことをいう。ランダム・ウォークでは、ある時点までどのように歩いてきたかという過去の行動とこれからどのように歩くかがお互いに独立している。これからどのように歩くかは、現時点においてどこにいるかということのみに依存する。ブラウン運動過程 (Brownian motion process) はウィナー・レヴィ過程 (Wiener-levy process) とも呼ばれている。

さらに、仮定することは、収益率 S/S ではなく、その対数 $\ln(S_t/S)$ が正規分布(対数正規分布)をするということである。すなわち、

$$\ln(S_t/S) = \mu t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z \quad (2-30)$$

これは指数表現すれば、

$$S_t = S e^{\mu t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z} \quad (2-31)$$

となり、瞬間的な期間 t にわたり、原資産の価格が $(\mu t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z)$ の率で指数的に展開される。

ここで、 e^x をテイラー展開すれば、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

これを用いると、

$$S_t/S = 1 + (\mu t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z) + (\mu t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z)^2/2 + \dots \quad (2-32)$$

$$= 1 + \sigma \sqrt{t} \cdot Z + (\mu + \sigma^2 Z^2/2) t + \dots$$

$(t)^2, (t)^3, \dots$ と高次の項を省略すると

$S_t/S = 1 + S_t/S$ であるから、(2-32) 式は

$$S_t/S = (\mu + \sigma^2 Z^2/2) t + \sigma \sqrt{t} \cdot Z \cdot \dots \cdot (2-33)$$

(2-33) 式は、(2-28) 式に対応しており、

$$\left. \begin{aligned} t &= (\mu + \sigma^2 Z^2/2) t \\ \sigma z &= \sigma \sqrt{t} \cdot Z \end{aligned} \right\} \dots \cdot (2-34)$$

であったことがわかる。これから (2-29) 式が成り立つことがわかった。

3. 多期間モデルとブラック・ショールズモデル

1 では 1 期間モデルの場合を扱いオプション価格を示したが、ここでは、多期間モデルの場合を示し、それとブラック・ショールズモデルとの関係を述べる。1 期後における株価は、 uS (上昇)、 dS (下落) の 2 通りであり、それに対応するコール・オプションの価値は C_u, C_d であり、現在のコール・オプションの価値は、

$$C = [pC_u + (1-p)C_d]/r \dots \cdot (3-1)$$

であった。2 期後の株価は uuS (上昇・上昇)、 udS (上昇・下落)、 duS (下落・上昇)、 ddS (下落・下落) の 4 通りが考えられ、オプションも C_{uu} (上昇・上昇)、 C_{ud} (上昇・下落)、 C_{du} (下落・上昇)、 C_{dd} (下落・下落) が考えられる。(3-1) 式を用いれば、

$$C_u = [pC_{uu} + (1-p)C_{ud}]/r$$

$$C_d = [pC_{ud} + (1-p)C_{dd}]/r$$

再び (3-1) 式を用いれば、

$$C = [p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}]/r$$

この考え方を多期間に用いれば、2 項分布を用いたコール・オプションの価格を導き出すことができる。

結果だけを用いれば、

$$C = (1/r)^n \left\{ \sum_{a=1}^n [n!/(n-a)!a!] p^a (1-p)^{n-a} C_{u^a d^{n-a}} \right\} \dots \cdot (3-2)$$

以下、(3-2) 式を以下のように変形する。

$$C_{u^a d^{n-a}} = \text{Max}[0, u^a d^{n-a} S - K]$$

いずれかの段階で利得が最初に発生する ($u^a d^{n-a} S - K > 0$) となるような上昇回数 m が存在するはずである。 $a < m$ の場合は満期におけるコールの価値は 0 となるから、コールの現在価値を計算するのに、満期に 0 以上の超過利潤を生じる $a \geq m$ の場合だけを集計すればよい。

$a < m$ のときは $C_{u^a d^{n-a}} = 0$, $a \geq m$ の場合については、

$$C_{u^a d^{n-a}} = \text{Max}[0, u^a d^{n-a} S - K] = u^a d^{n-a} S - K$$

であるから (3-2) 式は次式のように集約される。

$$C = (1/r)^n \left\{ \sum_{a=m}^n [n!/(n-a)!a!] p^a (1-p)^{n-a} [u^a d^{n-a} S - K] \right\} \dots \cdot (3-3)$$

(3-3) 式は以下のように変形できる。

$$C = S \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p^a (1-p)^{n-a} \frac{u^a d^{n-a}}{r^n} - \frac{K}{r^n} \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p^a (1-p)^{n-a}$$

そこで、 $p' = \left(\frac{u}{r}\right)p$

とおくと、 $1-p' = (d/r)(1-p)$

であるから、

$$C = S \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p'^a (1-p')^{n-a} - \frac{K}{r^n} \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p^a (1-p)^{n-a} \dots \cdot (3-4)$$

いま、 $B(m; n, p') = \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p'^a (1-p')^{n-a}$

$$B(m; n, p) = \sum_{a=m}^n \frac{n!}{(n-a)!a!} p^a (1-p)^{n-a}$$

よって、(3-4)式は以下のように簡単化して表すことができる。

$$C = SB(m; n, p') - Kr^{-n} B(m; n, p) \cdots (3-5)$$

$$\text{ただし、} p = (r-d)/(u-d), p' = (u/r)p$$

実は、確率論における中心極限定理を用いると、(3-5)式は $n \rightarrow \infty$ にした場合に、すでに導いたブラック・ショールズモデルに収束することが知られている。

$$B(m; n, p') \rightarrow N(d)$$

$$B(m; n, p) \rightarrow N(d - \sigma\sqrt{\tau})$$

つまり、2項分布モデルはブラック・ショールズモデルに本質的に一致することがわかる。■

4. ブラック・ショールズモデル再論

2におけるブラック・ショールズモデルの導出では、確率過程に関する議論および裁定ポートフォリオという概念に基づいて2階の偏微分方程式を解いて求めたが、本節ではオプションの基本概念と確率の基本に戻って、ブラック・ショールズモデルを直接導いてみよう。それは、原資産の価格の現在における満期の価格の確率密度（すなわち、現在から考えて満期には原資産の価格がどのようになっているかという予想）に基づいて、オプションの価格を、満期においてオプションを行使したときに得られる利益の期待値の現在価値として求める。オプションはコール・オプションを考える。 S を現在の株価、 S^* を満期における原資産の価格とし、 K を行使価格とする。 T を満期、 τ を現時点から満期時までの時間 ($\tau = T - t$) とする。 S^* の確率密度関数を $D(S^*)$ とおく。失効日におけるオプション・ホルダーの損益（オプション料は考えない） P/L は、

$$P/L = \begin{cases} S^* - K & (S^* > K \text{ のとき}) \\ 0 & (S^* \leq K \text{ のとき}) \end{cases}$$

$S^* - K$ の利益は、“原資産を K で買って S^* で売る”という行為による。満期時において得る利益の期待値 $E(\text{profit})$ は、

$$E(\text{profit}) = E(S^* - K) = \int_K^\infty (S^* - K) D(S^*) dS^* \cdots (4-1)$$

(4-1)式がコール・オプションの将来価値に他ならない。ここで、 $\ln S^*/S$ が正規分布に従う、言い換えれば S^*/S が対数正則分布に従うと仮定すると、一般的に確率変数 y が対数正規分布に従うということは、 y が

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}y} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$$

なる確率密度を持つことである（定義）。

また、 f に対して次のことが成り立つ。

任意の $a > 0$ に対して

$$\begin{cases} \int_a^\infty f(y) dy = N\left(\frac{\ln a^{-1} + \mu}{\sigma}\right) \\ \int_a^\infty y f(y) dy = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} N\left(\frac{\ln a^{-1} + \mu + \sigma^2}{\sigma}\right) \end{cases} \cdots (4-2)$$

が成立する(注1) ただし、

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{標準正規分布の累積密度関数})$$

ここで、 $a \rightarrow 0$ とすれば

$$\int_0^{\infty} f(y) dy = 1, \quad \int_0^{\infty} y f(y) dy = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

がわかる。すなわち、 f の平均は、 $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ である。

さて、 S^*/S が対数正規分布に従うということより、変数変換の公式(注2)より、 S^* の (S^*/S ではない) 確率密度 $D(S^*)$ は

$$D(S^*) = \frac{1}{S} f\left(\frac{S^*}{S}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}S^*} \exp\left\{-\frac{(\ln S^*/S - \mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} \cdots (4-3)$$

となる。よって、(4-1)式に(4-3)式を代入して

$$\begin{aligned} \text{コールの将来価値} &= Ce^{r\tau} = \int_K^{\infty} (S^* - K) D(S^*) dS^* \\ &= \int_K^{\infty} (S^* - K) \frac{1}{S} f\left(\frac{S^*}{S}\right) dS^* \\ &= \int_{K/S}^{\infty} \frac{1}{S} (St - K) f(t) S dt \quad (S^*/S = t) \\ &= \int_{K/S}^{\infty} (St - K) f(t) dt \\ &= S \int_{K/S}^{\infty} t f(t) dt - K \int_{K/S}^{\infty} f(t) dt \\ &= S \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau N\left(\frac{\ln S/K + (\mu + \sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &\quad - K N\left(\frac{\ln S/K + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned}$$

ここで、裁定条件より、

$$r\tau = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \Rightarrow \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \therefore C &= SN\left(\frac{\ln S/K + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Ke^{-r\tau} N\left(\frac{\ln S/K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln S/K + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

以上で2で導いたのと同じブラック・ショールズモデルが得られた。

ここで、 $B-S$ 式の意味について考えてみる。

$$Ce^{r\tau} = \int_K^{\infty} (S^* - K) D(S^*) dS^*$$

$$= Se^{r\tau} N(d_1) - KN(d_2)$$

$$\therefore \begin{cases} e^{-r\tau} \int_{K_{\infty}}^{\infty} S^* D(S^*) dS^* = SN(d_1) \\ e^{-r\tau} \int_K^{K_{\infty}} KD(S^*) dS^* = Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{cases}$$

第1項・・・原資産を売ることによって得られる利益の期待値の現在価値

第2項・・・原資産を行使価格で買うことによって支払う額の期待値の現在価値

(注1)

$$\begin{aligned} (*) \int_a^{\infty} f(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\infty} e^{-t} \cdot \exp\left\{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot e^t dt \quad (\ln x = t) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln a - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}} \sigma dk \quad \left(\frac{t - \mu}{\sigma} = k\right) \\ &= N\left(-\frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right) = N\left(\frac{\ln a^{-1} + \mu}{\sigma}\right) \\ (*) \int_a^{\infty} xf(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot e^t dt \quad (\ln x = t) \\ &= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\{t - (\mu + \sigma^2)\}^2}{2\sigma^2}\right\} dt \\ &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln a - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}}^{\infty} e^{-k^2} \cdot \sigma dk \quad \left(\frac{t - (\mu + \sigma^2)}{\sigma} = k\right) \\ &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} N\left(\frac{\ln a^{-1} + (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = N(-\alpha)\right) \end{aligned}$$

(注2) 確率変数の関数の分布

連続型の確率変数 x の密度関数を $f(x)$ とする。

このとき、 x の関数 $y = \varphi(x)$ の密度関数 $g(y)$ は

$$g(y) = f(\psi(y)) \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right|$$

ただし、 ψ は $y = \varphi(x)$ の逆関数 (すなわち、 $x = \psi(y)$)

S^*/S が対数正規分布する $\Leftrightarrow x = \ln S^*/S$ が正規分布する

$$N'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned} g(y) &= D(S^*) = f(\psi(S^*)) \frac{d\psi(S^*)}{dS^*} \quad (x = \psi(S^*) = \ln S^*/S) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln S^*/S - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \left(\frac{1}{S S^*}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} S^*} \exp\left\{-\frac{(\ln S^*/S - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (S^* \text{ の確率密度}) \\ &= \frac{1}{S} f\left(\frac{S^*}{S}\right) \\ &\quad (f \text{ は対数正規分布の密度関数}) \end{aligned}$$

* 本稿の執筆に際しては、以下を参考とした。

- ・ オプション評価理論の展望（青山護、証券アナリストジャーナル、1982）
- ・ 通貨オプション取引（大村敬一・清水正俊、金融財政事情研究会、1986）
- ・ オプション価格評価式と DYNAMIC ASSET ALLOCATION への応用（永野護、1986）
- ・ 初めてのオプション理論（村中健一郎、近代セールス社、1988）

* 筆者経歴

東京大学理学部数学科を経て教育学部卒業。証券会社、外資系通信社で金融・資本市場の業務を経験。専門は、債券資本市場。主な著書・論文：『信用リスクを読む』（日本評論社）、『信用リスクとM&A』（同）、『世界金融危機と信用リスク』（同）、『鎮めの文化と資本市場』（ブルームバーグ）、『ユーロ市場における金融革新』、『金融派生商品』

mail: sakurasaku9286@willcom.com