整数の剰余類のつくる加群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

整数全体の加群 Z を，自然数 n を法として類別した剰余類を考えます．このとき，異なる剰余類に属する二つの整数 a,b について，次の演算が成り立ちます．

$$a \equiv a' \ , \ b \equiv b' \ (\mathrm{mod}.n) \implies a+b \equiv a'+b' \ (\mathrm{mod}.n)$$

proof

左辺より，ある整数を使って k,k' **を使って，**$a-a'=kn, b-b'=k'n$ **と表わせるはずです．このとき** $(a+b)-(a'+b')=(a-a')+(b-b')=(k+k')n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}.n)$ **が示せます．∴** $a+b \equiv a'+b' \ (\mathrm{mod}.n)$ ■

ある剰余類の元に他の剰余類の元を足したものが，やはりどこかの剰余類に属する元になることが分かりましたので，どうやら整数の加群の剰余類は，剰余類同士の演算について閉じているようです．

このように，剰余類と剰余類を足すという加法演算を，『剰余類の集合』に導入しましょう．この加法演算には単位元があります (0 を含む剰余，すなわち余りが零の剰余類です)．また，逆元もあります (a を含む剰余類に $-a$ を含む剰余類を足すと，余りが零の剰余類になってしまいます)．

よって，この剰余類の集合は，加法に関して群になっていることが分かりました．これを n **に関する剰余類群** と呼び，Z_n で表わします．

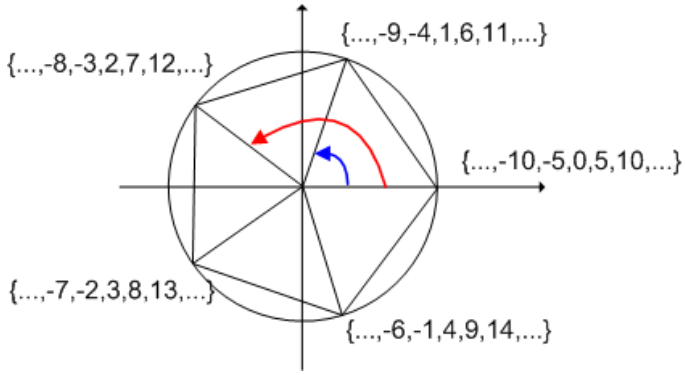
有限巡回群との同型

剰余類の辺りから少し話が抽象的になりましたから，剰余類群という，とても抽象的な群を求めたように感じるかも知れないのですが，実は，n に関する剰余類群 Z_n は，n 次の有限回転群と同型 (つまり有限巡回群と同型) で，もう読者のみなさんが知っている群なのです．面白いことです！

整数と聞いて，数直線状にまっすぐ数が並んでいるイメージしか持っていないと，ピンとこないかもしれません．しかし，次の図を見れば，剰余類の加法が，有限回転変換に対応させられることが納得いくと思います．

---

*1 一つ一つの剰余類は集合ですが，一般に剰余類自身は群にはなりません．ところが，このように剰余類の集合 (つまり，集合の集合！) を考えると，うまく群になったりするんですね．集合の集合，集合の集合の集合，のようなものをいくらでも考えられるのが，抽象数学の素晴らしさです．



あるいは，一直線の数直線を，周の長さが 5 の円筒にグルグル巻き付ければ，この図のようになると考えても良いでしょう．

[*2] n 次の有限巡回群を一般に Z_n と書くと，有限巡回群 のページで触れましたが，このような事情があったのですね．Z は整数 (ドイツ語で $Zahl$) の意味です．

[*3] 整数は無限にあるわけですが，整数全体を 5 で割ったときの剰余は，$0, 1, 2, 3, 4$ の 5 種類しかありません．しかもその剰余はグルグル循環します．そう考えると，有限巡回群と同型だというのも至極当然だと分かります．