

# 集合の元同士を足す・掛ける

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

この記事で勉強するのは、記号の書き方だけですので、特に難しいところは無いと思います。最後に、簡単な演習問題を載せておきます。

## 集合の元全てに何かを掛ける

二つの集合  $K, L$  を考えます。このとき、 $K$  に含まれる元と、 $L$  に含まれる元の積をとり、それらを全部集めた集合を  $KL$  もしくは  $LK$  のように書きます。 $KL$  と  $LK$  が両方あるのは、一般に積は可換ではないので、乗法の順序も重要だからです。

$$KL = \{kl | k \in K, l \in L\}$$

$$LK = \{lk | k \in K, l \in L\}$$

特に、 $K$  がたった一つの元  $a$  からだけなる集合  $K = \{a\}$  であった場合には、もう  $K$  の代わりに  $a$  と書いてしまった方が分かりやすいですから、次のように書きます。 $L$  の全ての元に、左から、もしくは右から  $a$  を掛けた集合という意味です。

$$aL = \{al | l \in L\}$$

$$La = \{la | l \in L\}$$

一般に、 $K$  や  $L$  が群でも、 $KL$  や  $LK$  は群にならないことに注意してください。

## 逆元だけ集める

次も、表記のルールです。集合  $K$  に含まれる各元に対し、その逆元だけを集めた集合を  $K^{-1}$  と書きます。

## 元同士を足す

特に、集合  $K$  と集合  $L$  の元の間には可換演算を考えると、この演算を加法の形で表現することができます。これを  $K + L$  と書きます。集合同士の和集合  $K \cup L$  とは意味が違いますので注意してください。

$$K + L = \{k + l \mid k \in K, l \in L\}$$

引き算も定義できます。

$$K - L = \{k - l \mid k \in K, l \in L\}$$

これらは、記法の問題ですから、慣れが肝心です。群の類別を勉強し始めると、こうした書き方の集合がたくさん出てきます。

### 問題 1

一般に、 $K$  や  $L$  が群でも、 $KL$  や  $LK$  は群にはならないことを示してください。また、 $KL$  や  $LK$  が群になるのはどのような場合でしょうか？

### 問題 2

もしも  $K$  が群ならば、 $K^{-1}$  も群になることを示してください。

### 問題 3

群  $G$  が元  $a$  を含みます。このとき、次のことをそれぞれ確認してみてください。

1.  $aG = G$
2.  $Ga = G$
3.  $G^{-1} = G$

### 問題 4

群  $G$  に含まれる任意の元  $x$  に対し、もし  $x^2 = e$  が成り立つならば、 $G$  は可換群であることを示してください。