

## 剰余類 2

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

この記事では、[剰余類](#) で勉強した、部分群に対する群の指数について、復習の意味も兼ねて定理を一つ追加し、そのあと部分群に関して群の元が合同であるとはどういうことを考えます。

### 指数の定理

群  $G$  の部分群  $H$  が、さらに部分群  $K$  を持つ場合を考えます。

$$G \supset H \supset K$$

このとき、指数について次の定理がなりたちます。

#### theorem

$$|G : K| = |G : H| |H : K|$$

まるで分数の計算のような美しい定理です。いずれ部分群の列  $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n$  を考えるときに、知っている役に立つでしょう。証明は以下に書きますが、簡単なのでまずは自分でやってみてください。

#### proof

群  $G$  が  $H$  によって  $G = a_1H + a_2H + \dots + a_nH$  と類別できたとします ( $a_i$  のうち一つは  $e$ )。このとき位数については  $|G| = n|H|$  が言えます。よって  $|G : H| = n$  です。同様に  $H$  も  $H = b_1K + b_2K + \dots + b_mK$  と類別でき、 $|H| = m|K|$  が言えるとしします。よって  $|H : K| = m$  です。 $H$  を最初の式に代入すると  $G = a_1b_1K + \dots + a_ib_jK + \dots + a_nb_mK$  となり、位数について  $|G| = nm|K|$  が言えますから、 $|G : K| = nm = |G : H| |H : K|$  が示せます。

この定理を使えば **ラグランジェの定理** が一発で証明できます。

## 合同

群を類別したとき、同じ類に含まれる元が同値関係にあることを **剰余類** でみました。剰余類による類別と同じ話を、少し異なるアプローチで考えてみます。まず群  $G$  とその部分群  $H$  を考え『 $H$  に関して  $G$  の元  $x, y$  が合同である』という関係を定義します。

群  $G$  の元  $x, y$  が、 $x^{-1}y \in H$  を満たすとき、『 $x$  と  $y$  は  $H$  に関して左合同である』といい、 $x \sim y(H)$  のように書きます。同様に、 $xy^{-1} \in H$  がなりたつなら右合同だといいます。

$$x, y \in G, x^{-1}y \in H \iff x \sim y(H) \quad (1)$$

ここで  $\sim$  の記号を使いましたが、次節に示すように  $x$  と  $y$  は同値関係にあります。 $\sim$  の記号も左合同と右合同で区別するべきですが、以後左合同だけを考えていきますので  $\sim$  だけでいきます。

## 同値関係

この関係が本当に同値関係になっているのか、反射律、対称律、推移律を満たすことを順次確認してみましょう。 $H$  は部分群なので単位元や逆元が存在することを使います。

1.  $x^{-1}x = e \in H$  となって、確かに反射律はなりたちます。 $x \sim x(H)$  (反射律)
2.  $x^{-1}y \in H$  ならば  $H$  は逆元を持ちますので  $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H$  が必要です。これより  $x \sim y(H) \iff y \sim x(H)$  がなりたちます (対称律)。
3.  $x^{-1}y \in H, y^{-1}z \in H$  ならば  $(x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H$  が言えますので、 $x \sim y(H), y \sim z(H) \iff x \sim z(H)$  がなりたちます (推移律)。

このように、一つの部分群を決めると、その部分群をめぐって群の元同士に同値関係を導入できるのです。ある部分群  $H$  に関して、元  $a$  に同値な元を全て集め、その集合を  $C_a$  と名づけます。式 (1) の定義に従えば、 $C_a$  を次のように書けるでしょう。

$$C_a = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \quad (2)$$

ところで  $C_a$  の元は  $a^{-1}x = y \in H$  と置くと、両辺に左から  $a$  を掛けて  $x = ay \in aH$  と書き換えられますから、結局  $C_a$  と剰余類  $aH$  は同じものだったのです。行き着いたところは同じでしたが、**剰余類** とは少し違ったアプローチで同値関係を考えてみました。とにかく、いろいろ考えるのが大事です (これが結論?)。

$$C_a = aH = \{ah \mid h \in H\} \quad (3)$$

群  $G$  の  $H$  による剰余類といったとき，式 (2) で書いても式 (3) で書いても同じことです。

## 加法群の場合

式 (1) をもう一度考えます。

$$x \sim y(H) \iff x^{-1}y \in H \quad (4)$$

もし  $G$  が加群ならば  $x^{-1} = -x$  ですので，次のように書き換えられます。

$$x \sim y(H) \iff -x + y \in H \quad (5)$$

このときの剰余類は  $a + H$  の形になります。元が部分群に関して同値である，といったときに，式 (4) や (5) がすぐに思い浮かぶとよいです。