商群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

正規部分群と群から，剰余類を集めた集合が群になります．これを商群と呼びます．とても大事な群です．

正規部分群の演算

群 G と，その正規部分群 H を考えます．H の，G における剰余類を全て集めた集合 M (つまり M の元のひとつひとつは G の剰余類) において，二つの剰余類の間に，次のような二項演算を定義します．

$$(aH)(bH) \ \rightarrow \ abH \tag{1}$$

この演算が確かに一意的だという証明に，H が正規部分群だという点が効いてきます．aH に属する任意の元 ah_1 と，bH に属する任意の元 bh_2 の間には，次の演算が成り立つことが示せるでしょう．途中で，積の順番を自由に入れ替えているのは，H が正規部分群だからです．

$$\begin{aligned} ah_1bh_2 &= ah_1b(aa^{-1})h_2 \\ &= ah_1a^{-1}abh_2 \\ &= (ah_1a^{-1})h_2ab \end{aligned}$$

ここで，定義より $ah_1a^{-1} \in H$ ですから，これに h_2 を掛けた $ah_1a^{-1}h_2$ も H の元です (H は部分群なので，演算について閉じているはずだからです)．従って，全体で $(ah_1a^{-1})h_2ab$ は abH に属していると言えます．確かに，(1) 式の二項演算が定義されることが分かりました．

まとめ

正規部分群 H には，次の演算規則が導入できます．可換だという点が重要です．

1. $aHbH = abH$
2. $aHa^{-1}H = H$
3. $(aHbH)cH = abHcH = abcH$

商群

群 G の一つの正規部分群を H とします．このとき，G の H に対する商集合 (つまり，H による剰余類全体の作る集合．商集合については，完全代表系と商集合 を復習して下さい．) を **商群**，もしくは **因子群**，**剰余群** などと呼びます．記号は商集合と同じで G/H のように書きます．

$$G/H = \{H, a_1H, a_2H, ...\}$$

一般の商集合は群にはなりませんが，H が正規部分群ならば G/H が群になるという点が大事です．前節で示したのは，G/H の元同士の演算が閉じている，ということだったのです．単位元 (H) や，逆元 (aH に対して $a^{-1}H$) もありますから，確かに G/H は群です．

位数の関係

有限群 G の商群 G/H は，G の剰余類の集合です．G の元の個数より剰余類の種類が多いことは無いので，位数について明らかに次の関係が成り立ちます．

$$|G/H| \leq |G| \tag{1}$$

さらに，ラグランジェの定理 より次の関係も言えるでしょう．

$$|G| = |H||G:H| = |H||G/H| \tag{2}$$

商群の位数は，常に群の位数の約数になっているということです．商群という名前は，式 (2) があたかも割り算のように見えることから来ているのでしょう．

整数の加群 Z の商群

練習問題として整数の加群 Z を考えてみます．Z に対し，ある整数 n を選びます．nZ は，n 倍数全体を表わす群で，Z の部分群になります．

$$nZ = \{..., -2n, -n, 0, n, 2n, ...\} \subset Z$$

いま，Z は n の剰余で類別できます．剰余類は $[m]$ のように表わします．例えば $[3]$ とあるのは『 n で割ったときに余りが 3 になる数の集合』という意味です．

$$Z = [0] + [1] + [2] + ... + [n-1]$$

商群は，この剰余類を元とする集合 $\{[0], [1], ..., [n-1]\}$ ですから，商群の元の間になりたつ演算を考えるには，これら剰余類同士の合成 (この場合は加法) を考えれば良いことになります．

---

*1 商群の単位元は H だという点に注意してください．

*2 商群の各元は aH のような形をしています．準同型写像 を勉強すると『群から群の写像 $f: G \longmapsto G/H$ で，元が $f: a \longmapsto aH$ のように移される』というような表現がたくさん出てきます．元の形には / は関係ありません．混乱しないためにも，ここできっちり商群に慣れておきましょう．

例えば，5 の剰余類を考えているとき，$[2]=\{...,-8,-3,2,7,12,...\}$ と $[4]=\{...,-6,-1,4,9,14,...\}$ を足すと，$[2]+[4]=\{...,-14,-9,-4,1,6,11,16,21,...\}=[1]$ となります．一般に，剰余類同士の加法には，次の関係がなりたつことが言えそうです．

$$[k]+[l]=[k+l]\ \mathrm{mod}.n$$

この演算規則は，n 次の巡回群に成り立つものと全く同じものです (有限巡回群 参照)．よって，Z **の商群は** n **次の有限巡回群に同型である** と言えるのです．