ラグランジェの定理

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

ここまでに，群の位数と，元の位数という，紛らわしい二つの言葉が出てきました．混乱しやすいので，もう一度定義をおさらいします．

1. 群の位数とは，群の元の数です．
2. 元の位数とは，群のある元を生成元として有限部分巡回群がつくれるとき，その部分巡回群の位数のことです．

では，先に進みましょう．

ラグランジェの定理

有限群 G の位数と，その部分群 H の位数の間には，ラグランジェの定理と言われる美しい関係が成り立っています．

theorem

群 G の部分群の位数は，G の位数の約数になる．$|G| = |G : H||H|$．

proof

群 G の部分群 H による類別が $G = a_1H + a_2H + ... + a_rH$ のように表わされるとします．G は有限群なので，有限個 (r 個としています) の類によって類別できるはずです．そこで位数について $|G| = r|H|$ の関係が言えます．r を $r = |G : H|$ と書くのでしたので，$|G| = |G : H||H|$ が言えます．■

証明中では，当たり前と考えて言及しませんでしたが，各類に含まれる元の個数が H の位数に等しいことが本質的に重要です．H から a_iH の元を作る a_ih という演算は一意的なので，H の元と a_iH の元の間には一対一対応が成り立ち，元の個数は同じになるわけです．このあと軌道や中心という概念を勉強

するとき，ラグランジェの定理が重宝しますので，覚えておくと良いでしょう．

図 1　(群論が生まれる前から群の概念に到達していたラグランジェ)

定理

theorem

位数が素数の有限群は巡回群であり，真部分群を持たない

proof

群 G の元 $a(\neq e)$ を生成元として，巡回部分群 H を生成することを考えます．このとき，ラグランジェの定理により，$|H|$ は $|G|$ の約数となるはずですが，$|G|$ は素数 (P とする) ですから，$|H|$ は p か 1 しかあり得ません．しかし，H には少なくとも a と e が含まれますので $|H|$ は 1 ではなく，$|H| = p$ が言えます．G の位数と部分群 H の位数が等しいということは，H が G 自身であるということです．従って，H は G の真部分群ではないことが言えます．■

[*1] 実は 剰余類 2 で紹介した指数の定理 $|G:K| = |G:H||H:K|$ において $K = \{e\}$ と置けばラグランジェの定理になります．

[*2] ラグランジェの時代には群論はまだ完成していませんでしたが，既に幾つかの具体的な例について，ラグランジェはこの定理に気が付いていたということです．恐るべき慧眼です．

[*3] このあたりの記号にまだ慣れていない人は，もう一度 剰余類 や 完全代表系と商集合 の記事を復習してください．

[*4] 素数のことをよく p で表わしますが，英語で素数を *prime number* と言うので，その頭文字から来ています．