固定部分群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

軌道に関する概念で重要なものに，固定部分群があります．

固定部分群の定義

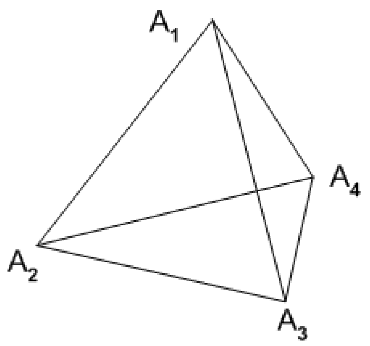
群 G の，集合 M 上の軌道を考えるとき，M 上の一点 (x_0 とします) を不動に保つ変換 g ($g \in G$) 全体からなる集合は **群になります**．群の公理を確認してみましょう．

1. $g(x_0) = x_0$，$h(x_0) = x_0$ ならば，$(g \circ h)(x_0) = g(h(x_0)) = g(x_0) = x_0$ となり，演算について閉じています．
2. 結合則がなりたちます．$(g \circ h)(x_0) = g(h(x_0))$
3. 単位元があります．
4. $g(x_0) = x_0$ より，$x_0 = g^{-1}(g(x_0)) = g^{-1}(x_0)$ が成り立ちますので，逆元も存在することが言えます．

これを x_0 の **固定部分群** (もしくは **安定部分群**) と呼び，G_{X_0} のように書きます．例を見たほうが，意味が分かりやすいでしょう．

例 1

正四面体群 $P(4) = \{e, (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3), (1\,3\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,4)(2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,3)\}$ のうち，図の頂点 A_1 の固定部分群は，$\{e, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$ です．



$$P(4)_{A_1} = \{e, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$$

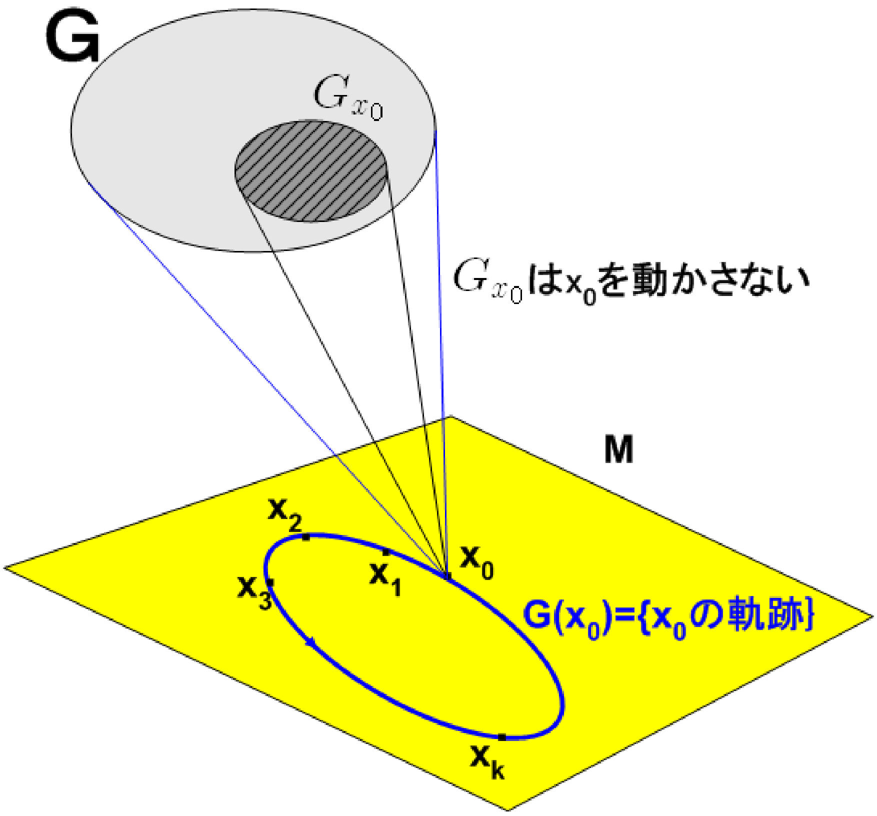
この 3 つの元以外は，頂点 A_1 を動かしてしまうことと，$P(4)_{A_1}$ が $P(4)$ の部分群になっていることを確かめてください．

例 2

3 次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ の，集合 $M = \{1, 2, 3\}$ に対する左作用を考えるとき，1 に対する固定部分群は $\{e, (2\ 3)\}$ です．また，$\{e, (2\ 3)\}$ だけで部分群になることを確認してください．

固定部分群と軌道の関係

群 G が集合 M に作用するとき，M 上のある点 x_0 に関して，x_0 の軌道 $G(x_0)$ と x_0 の固定部分群 G_{x_0} との間には密接な関係があります．(G_{x_0} と $G(x_0)$ の記号がとても紛らわしいです．ここまでのところを明快に理解してから先に進むようにしてください．軌道 $G(x_0)$ の方は，群を関数のように見ているので括弧がつき，G_{x_0} の方は G の部分群なので G に添字がついていると覚えると覚えやすいと思います．)



いま，集合 M 上で点 x_0 の群 G による軌道，すなわち $G(x_0)$ は，M の部分集合になります．（もし x_0 が不動点なら部分集合は x_0 のみです．もし x_0 の軌道が M 内をくまなく含むとしたら，部分集合は M 自身です．いずれにせよ，$G(x_0)$ は M の部分集合だと言えそうです．）いま，$G(x_0)$ には k 個の元が含まれるとします．

$$G(x_0) = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$$

このとき，軌道と固定部分群の間には，次のような重要な関係が成り立つことが知られています．

theorem

群 G が集合 M に作用するとき，M 上の一点 x_0 に関し，x_0 の G による軌道 $G(x_0)$ と，G の x_0 に関する固定部分群 G_{x_0} とが一対一に対応します．

証明は次のように考えます．軌道 $G(x_0) = x_0, x_1, ..., x_k$ に対し，G の元のなかには，x_0 を x_i に移すような元が必ず存在するはずです．この元を g_i と名づけましょう．さて，ここで仮に x_0 を x_i に移すような元が二つあったとします．

$$x_i = g_{i_1}(x_0), \quad x_i = g_{i_2}(x_0)$$

一番目の式から，${g_{i_1}}^{-1} x_i = x_0$ が言えますので，二番目の式の両辺に ${g_{i_1}}^{-1}$ を掛けて次式を得ます．

$${g_{i_1}}^{-1} g_{i_2}(x_0) = x_0$$

これより，${g_{i_1}}^{-1} g_{i_2}$ は x_0 を動かしませんので，x_0 の固定部分群 G_{x_0} の元だと言うことがわかります．

$${g_{i_1}}^{-1} g_{i_2} \in G_{x_0}$$

上の関係を，両辺から ${g_{i_1}}^{-1}$ を掛けて次のように書き直してみましょう．

$$g_{i_2} \in g_{i_1} G_{x_0}$$

これは，g_{i_2} と g_{i_1} が，G_{x_0} の同じ左剰余類に属しているという主張に他なりません．つまり，群 G の元のうち，軌道 $G(x_0) = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ の元 x_0 を x_i に移すような働きをするものは，全て同じ左剰余類に入るということになります．■

軌道による類別

この結果を使うと『軌道 $G(x_0) = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ の元 x_0 を，どの元に移す作用をもつか』によって，群 G の元を次のように分類できることになるでしょう．(元 x_0 を x_i に移すような群 G の元の一つを，g_i と書いておきます．このような元は複数あるかもしれませんが g_i で代表させておきます．)

$$G = G_{x_0} + g_1 G_{x_0} + g_2 G_{x_0} + ...$$

もう一度おさらいしておくと，この式の意味するところは『第一項 (x_0 の固定部分群) は，x_0 を動かさない元全てを含む (これは定義)』『第二項は，x_0 を x_1 に移すような変換をする元全てを含む』『第三項は，x_0 を x_2 に移すような変換をする元全てを含む』・・・以下同様・・・ということです．

一つの元が，x_0 を x_1 に移すこともあれば，気分によって x_2 に移すこともある！？・・・なーんてことは，ありませんので，上の分け方に重複はありません．よって，これは **類別** になっているのでした (軌道の概念 の定理を参照).

大事なのは，『群 G の元 g が，G の G_{x_0} による左剰余類 $g_k G_{x_0}$ の元である』ということと，『 g_k は x_0 が x_k を通るような軌道を与える』ということが同値だという点です．

$$g \in G_{x_0} \iff g(x_0) = x_0$$

$$g \in g_1 G_{x_0} \iff g(x_0) = x_1$$

$$g \in g_2 G_{x_0} \iff g(x_0) = x_2$$

$$................$$

$$g \in g_i G_{x_0} \iff g(x_0) = x_i$$

$$................$$

軌道 $G(x_0)$ は，M の部分集合なわけですが，その軌道を見ることで，もとの群 G の元を類別できてしまったわけです．

この結果を次のように表現することもできます．

theorem

群 G が集合 M の作用するとき，M の一点 x_0 の G-軌道は，G の G_{x_0} による左剰余類と一対一に対応します．

また，とくに G が有限群の場合は，次の関係が成り立ちます．

$$G = G_{x_0} + g_1 G_{x_0} + g_2 G_{x_0} + ... + g_k G_{x_0}$$

これより，$G(x_0) = \{e, g_1, ..., g_k\}$ とすると，位数に関して次の関係が言えるでしょう．

$$|G| = |G(x_0)| \cdot |G_{x_0}|$$

これは大事な関係ですから，定理として覚えておきます．

theorem

有限群 G の G-軌道に現われる点の個数は，G の位数の約数になります．

意味するところがとてもイメージしやすい定理です．ここで，自分なりにしっかりと意味を理解しておきましょう．

[*1] 慣れるまで $G(x_0)$ と G_{x_0} は記号が紛らしいですので，しっかりと覚えるようにしてください．$G(x_0)$ は x_0 の G-軌道で M の部分集合，G_{x_0} は x_0 の固定部分群で G の部分群です．