

体 (たい)

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-05-27

ある集合があって、その集合が、四則演算 (加法, 減法, 乗法, 除法) に関して閉じているとき、この集合を **体** と呼びます。

体の公理

以下の条件を満たす集合を体と呼びます。

1. 加法について可換群になっています。(加法が閉じており、単位元 0 、逆元 $-a$ があります)。加法の単位元を特に **零元** と呼びます。
2. 乗法について可換群になっています。(乗法が閉じており、単位元 e 、逆元 a^{-1} があります。ただし、加法の単位元 0 の逆元だけは定義できません。)
3. 加法と乗法について分配法則がなりたちます。 $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$

いままで群について学んで来ましたが、群には演算が一種類だけ与えられていたのです (そしてそれは加法でも乗法でも良かったのです)。体には、加法と乗法という、二種類の演算が入っています。加法の逆演算は減法、乗法の逆演算は除法ですから、要するに **体** とは四則演算が可能な集合のことであると考えられます。

例

下の例を考えながら、『四則演算の定義された集合』というのがどういうものか、堪能してみてください。今まで普通に知っていた集合が多いと思いませんか？

*1 体は加法に関しては群、乗法に関しては零元を除いて群になっていますので、いままで群論で勉強した概念が、だいたいそのまま体にも当てはまります。また体は、次に勉強する **環** よりも強い構造ですので、環に当てはまる議論が、ほとんどそのまま体に適用できます。

*2 いままで、群論に出てきた情報は一般には非可換でしたが、体の乗法は可換ですので、計算が随分と簡単になることを感じられると思います。体の公理に準じつつも、乗法は非可換の体を「**斜体**」と呼びます。こんな変な体は、今は覚えなくても大丈夫です。

例 1

有理数の全体は体です。有理数 + 有理数，有理数 - 有理数，有理数 × 有理数，有理数 ÷ 有理数 (ただし零では割らない) は，いずれも有理数になるからです。これを 有理数体 と呼び， Q で表わします。

例 2

実数の全体も体になります。実数同士は足したり，引いたり，掛けたり，割ったりでき，結果も実数になるからです。同じく 実数体 と呼び， R で表わします。

例 3

複素数の全体も体になります。自分で確認してみましょう。複素数体 と呼び， C で表わします。

例 4

整数の全体は体ではありません。整数 ÷ 整数は，かならずしも整数にはならないからです。自然数の全体も体ではありません。自然数 - 自然数や，自然数 ÷ 自然数が，かならずしも自然数にはならないからです。

例 5

四元数の全体は体になります。四元数体 と呼ばれます。四元数の四則演算については，[四元数](#) を参照ください。

例 6

整数の加法群 Z から，素数 p の剰余群 $Z/[p]$ を作ります ($[p]$ は p の倍数の集合の意味です。なぜ p を素数とするのかは後ほど 整域・整数の剰余類の環 で説明します。)

$$Z/[p] = \{[p], 1 + [p], 2 + [p], \dots, (p-1) + [p]\}$$

この元の中で偶数からなる元を $\bar{0}$ ，奇数からなる元を $\bar{1}$ と表わすと，元の間次のような加法と乗法を定義できます。

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$$

$$\bar{1} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{0}\bar{0} = \bar{1}\bar{0} = \bar{0}\bar{1} = \bar{0}$$

$$\bar{1}\bar{1} = \bar{1}$$

零元は $\bar{0}$ ，乗法の単位元は $\bar{1}$ です。このような加法と乗法に対して， $Z/[p]$ は体になります。