アイゼンシュタインの定理

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-06-24

与えられた多項式が既約であるかどうかを判断するのに便利な，アイゼンシュタインの定理と呼ばれる定理があります．

theorem

整数係数を持つ Q 上の多項式 $f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ に対しある素数 p が存在し，p が係数 $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ を割り，c_n を割らず，かつ p^2 が c_0 を割らないとき，$f(x)$ は既約であると言えます．

proof

仮に f が可約だとして背理法で示します．可約な多項式はガウスの補題（ 因数分解の一意性 を参照) により，整数係数を持った多項式の積に分解できます．$f = gh$．ここで $g(x) = a_0 + a_1x + ... + a_rx^r$, $h(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^{n-r}$ と置くと，f の係数は $c_i = \sum a_kb_{i-k}$ と表わされます．仮定より，p は $c_0 = a_0b_0$ を割るため，p は a_0 か b_0 を割りますが，p^2 が c_0 を割らないことより， a_0 と b_0 の両方を割ることはありません．ここで p は a_0 を割り，b_0 を割らないと決めても一般性を失いません．次に $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$ ですが，先の結果より p は b_0 を割りませんので a_1 を割ることが要請されます．順番に c_i を見ていくと，p は a_i を全て割るという結果に至ります．これは p が主係数 c_n を割らないとした仮定に反します．よって f は既約です．■

証明だけ追っても，定理の意味がピンと来ないと思います．定理自体は簡単ですので，以下の練習問題を解いてみれば，この定理が何を言っているのか，どういう風に使うのかが分かってくると思います．

練習問題1

アイゼンシュタインの定理を使って，次の多項式が既約であることを示して下さい．（ヒント：係数の条件を思い出してください．）

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

練習問題 2

次の多項式が既約であることを示して下さい．ただし p は素数とします．(ヒント： $f(x+1)$ を考えてみましょう．)

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}$$

伝記

アイゼンシュタイン (Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)) は幼少のときから常に病気がちで，家庭も貧しく，彼の５人の兄弟姉妹はみな成人する前に夭逝してしまいました．そのような事情もあってか塞ぎがちで難しい性格の人だったようです．しかし早くから学校では数学の才能を認められ，オイラーやラグランジェの著作を独学で学びました．その後ガウスの『整数論』(原題：*Disquisitiones arithmericae*) に魅了され，ガウスの弟子となって数論の研究を続けました．しかし，常に持病に悩み，結局若くして死んでしまいました．そんなに有名な数学者ではありませんが，なんだかとても可哀想です．定理に名前が残っているのは幸いです．