中心化群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

中心化群の定義には，ここまでに勉強してきた，共役，共役類，軌道，中心，固定部分群といった概念が全て必要になります．何となく曖昧な部分がある人は，先に復習しておきましょう．

中心化群の定義

群 G のある元 a を考えます．a に対し，$ga = ag$ を満たす G の元を全て集めた集合は群になり，これを a の中心化群 C_a と呼びます．

$$C_a = \{g|ga = ag,\ g \in G\}$$

『中心化群とは，群のある元に対し，**群自身への共役作用を考えるときの固定部分群である** 』と言い換えることもできるでしょう．(共役類，群が集合の上で働くということ，固定部分群 を参照して下さい．)

中心化群に関しては，次の定理が重要です．

theorem

群 G の元 a に対し，C_a を a の中心化群，$C(a)$ を a の共役類 (軌道) とすると，位数に関して $|G| = |C_a||C(a)|$ がなりたちます．

群の位数 $|G|$ は定数ですから， a の中心化群が大きければ，a の共役類は小さくなり，逆に a の中心化群が小さいと，a の共役類が大きくなるということです．中心化群は固定部分群の特殊な場合ですから，固定部分群 に出てきた式 $|G| = |G(x_0)| \cdot |G_{x_0}|$ などと比較して，もう一度頭を整理しましょう．

部分集合の中心化群

上の定義では，ある一つの元 a に対し，a に共役な元を全て集めたものを「元 a の中心化群」としました．同様に，この定義を拡張し，群 G のある部分集合 H に対し，H に属する全ての元と共役な G の元を全て集めた集合を「部分集合 H の中心化群」と定義できます．

例1

三次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ で，例えば $(1\ 2)$ の中心化群を求めてみましょう．

求めたいのは，$(1\ 2) = p(1\ 2)p^{-1}$ を満たす全ての p です．順番に全部試してみても，計算はすぐに済みますが，結果としては，$e, (1\ 2)$ の二つが求まります．よって，S_3 の $(1\ 2)$ に関する中心化群は $\{e, (1\ 2)\}$ と決まります．確かに $\{e, (1\ 2)\}$ だけで群になっていますね．

例2

点 O を中心とする回転全てからなる群を考えます．このとき，x 軸を中心としたある回転 p (静止と 180 度回転を除く) に関する中心化群はどのような回転の集まりになるでしょうか．

一般に，異なる軸に関する回転操作は非可換でしたので，$gp = pg$ を満たすような元 g もやはり x 軸回りの回転であると考えられます．逆に，g が x 軸回りの回転を表わす元ならば，$gp = pg$ を満たします．p の中心化群は，x 軸回りの回転全て (静止と 180 度回転も含む) からなるものです．

発展：

すぐに重要な訳ではありませんが，群の中心 の記事で軽く紹介した p 群には，興味深い定理がなりたつので，証明とともに紹介しておきます．証明の途中で中心化群を利用します．

theorem

位数が素数の平方である有限群は，可換群になります．

proof

中心 C は群 G の部分群ですから，中心の位数は，群の位数 p^2 の約数になっているはずです．群の中心 の「群の位数と中心」のセクションで紹介した定理により，中心 C には二つ以上の元がありますから，中心の位数として可能なのは p か p^2 だけです．p^2 のときは，中心は群 G そのものということであり，これは群の全ての元が演算に関して交換可能，すなわち可換群であるという主張です．一方，中心の位数が p のときは，C に含まれない G の元を一つ (仮に a とします) 取ると，a の中心化群は C を含み，かつ a の累乗をも含みますので，この中心化群の位数はは中心の位数 p よりも大きくなるはずです．すると中心化群の位数は p^2 ということになりますが，この場合，中心化群が群 G そのものとなり，a が中心 C に含まれてしまうことになりますので，これは矛盾です．よって中心の位数が p ということはありえず，p 群の中心は常に群そのものと一致し，可換群になりことが分かりました．■