代数的数と超越数

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-06-24

一つの前の記事 代数方程式の性質 で代数方程式を定義しました．

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

特に，**有理係数の代数方程式の解** を **代数的数** と呼びます．例えば $\sqrt{2}$ や i は，$x^2 - 2 = 0$, $x^2 + 1 = 0$ といった有理係数代数方程式の解ですから代数的数です． $\sqrt[100]{2}$ もやはり $x^{100} - 2 = 0$ という有理係数代数方程式の解ですから代数的数です．一方，$\sqrt{\pi}$ は $x^2 - \pi = 0$ という代数方程式の解ではありますが，係数 π が有理数ではありませんので，この例を見る限り $\sqrt{\pi}$ は代数的数ではありません．

しかし，他に π を解とする，有理係数の代数方程式は一切存在しないと言えるのでしょうか？世の中には無限に代数方程式があるわけですから，どんな数だって，何らかの代数方程式の解になっているということないでしょうか？実は，世の中の仕組みはそうはなっていません．どうしても代数方程式の解にはならない数が無数に存在します．これらを **超越数** と呼びます．

超越数の有名な例には $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}$ 等があります．ある数が代数的数であることを証明するのは簡単ですが，超越数であることを証明するのはとても難しいことです．π が超越数であることの証明は 1882 年，リンデマン (Ferdinand von Lindemann (1852-1939)) によってなされましたが，とても難しいものだそうです．

図 1 （ π が超越数であることを証明したリンデマン)

練習問題１

一般に，$a + \sqrt[n]{c}\, b$ $(a, b, c \in Q)$ の形をした数は代数的であることを示して下さい．（ヒント：このような数を x と置いて，移項したり累乗したりして代数方程式を作ってみましょう．）

練習問題２

$\cos(k\pi)$ は k が有理数であるときに代数的数であることを示して下さい．（ヒント：加法定理を使ってみましょう．）